EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2023年12月9日（土）
4分野受験 午後1時30分 ～ 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 ～ 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時10分

＊ 受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．
(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．
(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．
(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．
(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．
(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．
(8) 問題冊子は持ち帰ること．
(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば， $\boxed{\textbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は, 前に現れた番号であることを表す．したがって, 例えば $\boxed{\textbf{23}}$ には $\boxed{\textbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， $\boxed{\textbf{23}}$ は（$\boxed{\textbf{23}}$）という意味である．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2 - \boxed{\textbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

(6) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{17}}$ 〕

問１　次の 2 つの極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x}{3x^2} = \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin^{-1}\frac{2}{x} = \boxed{\mathbf{2}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ -1	④ -2
⑤ $\frac{1}{2}$	⑥ $\frac{1}{3}$	⑦ $\frac{1}{4}$	⑧ $\frac{1}{6}$	
⑨ $-\frac{1}{2}$	ⓐ $-\frac{1}{3}$	ⓑ $-\frac{1}{4}$	ⓒ $-\frac{1}{6}$	
ⓓ e	ⓔ π	ⓕ $\frac{\pi}{2}$	ⓖ $+\infty$	ⓗ $-\infty$

計算用紙

問 2 実数全体で連続な関数 $f(x)$ に対し，$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるならば，微分積分学の基本定理より，実数 $a, b\ (a < b)$ について

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つ．よって，c を定数として，関数 $F_1(x)$ と $F_2(x)$ をそれぞれ

$$F_1(x) = \int_c^x f(t)\,dt, \quad F_2(x) = \int_c^x tf(t)\,dt$$

と定義すると

$$\frac{d}{dx}F_1(x) = \boxed{\mathbf{3}}, \quad \frac{d}{dx}F_2(x) = \boxed{\mathbf{4}}$$

となる．さらに，関数 $F_3(x)$ を $F_3(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} tf(t)\,dt$ と定義すると

$$\frac{d}{dx}F_3(x) = \boxed{\mathbf{5}}$$

となる．

$\boxed{3}$ 〜 $\boxed{5}$ の解答群

⓪ $f(x)$	① $f(x^2) - f(x)$	② $2xf(x^2) - f(x)$
③ $xf(x)$	④ $xf(x^2) - xf(x)$	⑤ $2x^2f(x^2) - xf(x)$
⑥ $2f(x^2)$	⑦ $x^2f(x^2) - xf(x)$	⑧ $2x^3f(x^2) - xf(x)$
⑨ $2xf(x^2)$	ⓐ $x^4f(x^2) - x^2f(x)$	ⓑ $2x^4f(x^2) - xf(x)$

計算用紙

問 3　(1)　定積分 $I_1 = \displaystyle\int_1^{e^\pi} \frac{(\log x)^2}{x}\,dx$ を変数変換を用いて求める．$\log x = t$ とおくと

$$I_1 = \int_0^{\boxed{\mathbf{6}}} t^2\,dt$$

と表される．これを計算すると $I_1 = \boxed{\;\mathbf{7}\;}$ が得られる．

(2)　定積分 $I_2 = \displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\log x)\,dx$ についても，$\log x = t$ とおくと

$$I_2 = \int_0^{\boxed{\mathbf{6}}} \boxed{\;\mathbf{8}\;}\,dt$$

と表される．ここで部分積分を 2 回行うと，$I_2 = \boxed{\;\mathbf{9}\;} - I_2$ となることより，

$I_2 = \dfrac{1}{2}\boxed{\;\mathbf{9}\;}$ が得られる．

$\boxed{\mathbf{6}}$ ・ $\boxed{\mathbf{7}}$ ・ $\boxed{\mathbf{9}}$ **の解答群**

⓪ 0	① π	② $\sin(\log\pi) - \cos(\log\pi)$
③ $\dfrac{\pi^2}{2}$	④ $\dfrac{\pi^3}{3}$	⑤ $\sin(\log\pi) - \cos(\log\pi) + 1$
⑥ e^π	⑦ $e^\pi + 1$	⑧ $e^\pi(\sin(\log\pi) - \cos(\log\pi))$
⑨ $\log\pi$	ⓐ $e^\pi + e$	ⓑ $\pi(\sin(\log\pi) - \cos(\log\pi) + 1)$

$\boxed{\mathbf{8}}$ **の解答群**

⓪ 0	① t	② e^t	③ te^t	④ te^{-t}
⑤ $\log t$	⑥ $\sin t$	⑦ $t\sin t$	⑧ $e^t\sin t$	⑨ $e^{-t}\sin t$

計算用紙

問 4　2 変数関数 $z = \tan^{-1}(u+v)$ について，$u = e^t, v = e^{-t}$ とするとき

$$\frac{dz}{dt} = \boxed{\mathbf{10}}$$

となる．また，$u = x^2 - y^2, v = 2xy^2$ とするとき

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \boxed{\mathbf{11}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \boxed{\mathbf{12}}$$

となる．

$\boxed{10}$ の解答群

⓪ $\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$　① $\dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$　② $\dfrac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$

③ $\dfrac{e^t + e^{-t}}{(e^t - e^{-t})^2}$　④ $\dfrac{e^t + e^{-t}}{1 + (e^t - e^{-t})^2}$　⑤ $\dfrac{e^t - e^{-t}}{1 + (e^t + e^{-t})^2}$

⑥ $\dfrac{1 + e^t - e^{-t}}{(e^t + e^{-t})^2}$　⑦ $\dfrac{1 + e^t + e^{-t}}{(e^t + e^{-t})^2}$　⑧ $\dfrac{1 + e^t + e^{-t}}{(e^t - e^{-t})^2}$

$\boxed{11}$ ・ $\boxed{12}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x+y}{1 + (x^2 - y^2)^2}$　① $\dfrac{2(x+y^2)}{1 + (x^2 - y^2)^2}$

② $\dfrac{2y(2x-1)}{1 + (x^2 + y^2)^2}$　③ $\dfrac{2x + y^2}{1 + (x^2 + y^2)^2}$

④ $\dfrac{2(x+y^2)}{1 + (x^2 - y^2 + 2xy^2)^2}$　⑤ $\dfrac{-2x(2y-1)}{1 + (x^2 - y^2 + 2xy^2)^2}$

⑥ $\dfrac{2x(2y-1)}{1 + (x^2 - y^2 + 2xy^2)^2}$　⑦ $\dfrac{2y(2x-1)}{1 + (x^2 - y^2 + 2xy^2)^2}$

⑧ $\dfrac{2(x+y^2)}{1 + (x^2 + y^2 + 2xy^2)^2}$　⑨ $\dfrac{-2y(2x-1)}{1 + (x^2 + y^2 + 2xy^2)^2}$

ⓐ $\dfrac{2(x+y^2)}{1 - (x^2 + y^2 + 2xy^2)^2}$　ⓑ $\dfrac{x + 2y^2}{1 - (x^2 + y^2 + 2xy^2)^2}$

計算用紙

問 5　xy 平面上の集合 D が

$$D = \left\{ (x,\, y) \;\middle|\; (x^2+y^2)^2 \leqq x^2 - y^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\, dxdy$$

の値を求める．極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を行うと，集合 D に対応する (r,θ) の条件は，倍角の公式を用いることにより

$$0 \leqq r^2 \leqq \boxed{\mathbf{13}}, \quad \cos\theta \geqq 0, \quad \sin\theta \geqq 0$$

と表され，θ の動く範囲は $0 \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{14}}$ となる．したがって，D に対応する (r,θ) の集合は

$$E = \left\{ (r,\, \theta) \;\middle|\; 0 \leqq r \leqq \sqrt{\boxed{\mathbf{13}}},\ 0 \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{14}} \right\}$$

である．また，変数変換のヤコビ行列式（ヤコビアン）は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{15}}$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \iint_E \frac{1}{(1+r^2)^2}\, \boxed{\mathbf{15}}\, drd\theta \\ &= \int_0^{\boxed{\mathbf{14}}} \left(\int_0^{\sqrt{\boxed{\mathbf{13}}}} \frac{1}{(1+r^2)^2}\, \boxed{\mathbf{15}}\, dr \right) d\theta \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\int \frac{1}{1+\cos 2\theta}\, d\theta = \boxed{\mathbf{16}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

であることを用いると $I = \boxed{\mathbf{17}}$ を得る．

$\boxed{13}$ 〜 $\boxed{15}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② r	③ $r\sin\theta$
④ π	⑤ 2π	⑥ $\dfrac{\pi}{2}$	⑦ $\dfrac{\pi}{4}$
⑧ $\sin 2\theta$	⑨ $\cos 2\theta$	ⓐ $\sin\dfrac{\theta}{2}$	ⓑ $\cos\dfrac{\theta}{2}$
ⓒ $\dfrac{\sin 2\theta}{2}$	ⓓ $\dfrac{\cos 2\theta}{2}$	ⓔ $1-\cos 2\theta$	ⓕ $1+\cos 2\theta$

$\boxed{16}$ の解答群

⓪ $\sin\theta$	① $\dfrac{1}{2}\sin\theta$	② $\dfrac{1}{3}\sin\theta$	③ $\dfrac{1}{4}\sin\theta$
④ $\cos\theta$	⑤ $\dfrac{1}{2}\cos\theta$	⑥ $\dfrac{1}{3}\cos\theta$	⑦ $\dfrac{1}{4}\cos\theta$
⑧ $\tan\theta$	⑨ $\dfrac{1}{2}\tan\theta$	ⓐ $\dfrac{1}{3}\tan\theta$	ⓑ $\dfrac{1}{4}\tan\theta$

$\boxed{17}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $+\infty$	
③ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{4}$	④ $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{4}$	⑤ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}$	⑥ $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}$
⑦ $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{4}$	⑧ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{4}$	⑨ $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$	ⓐ $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$
ⓑ $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}$	ⓒ $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$	ⓓ $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{2}$	ⓔ $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{2}$

第2分野　線形代数

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{18}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{35}}$ 〕

(注意) 行列 A に対し，$\mathrm{rank}\,A$ は A の階数（ランク）を表す.

問 1　行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とする.

(1)　行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\mathbf{18}}$ であるから，A は逆行列を $\boxed{\mathbf{19}}$.

(2)　行列式 $|A|$ を第 1 列に関して余因子展開すると

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \boxed{\mathbf{20}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

である.

$\boxed{\mathbf{18}}$ ・ $\boxed{\mathbf{20}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -3　⑨ -4　ⓐ -5

$\boxed{\mathbf{19}}$ の解答群

⓪ もつ　① もたない

計算用紙

問 2 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ における 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ s \end{pmatrix}$$

について考える．ただし，s は定数とする．

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が 1 次従属になるのは $s =$ $\boxed{\textbf{21}}$ のときである．

(2) $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の両方と直交するのは $s =$ $\boxed{\textbf{22}}$ のときである．このとき，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が張る平行六面体の体積は $\boxed{\textbf{23}}$ である．

$\boxed{21}$ 〜 $\boxed{23}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 6
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -6

計算用紙

問 3 $\mathbb{R}^3$ から $\mathbb{R}^2$ への線形写像 f がベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して

$$f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad f(\boldsymbol{c}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を満たすとする．

(1) 単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対して

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{\mathbf{24}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるから，$f(\boldsymbol{e}_1) = \boxed{\mathbf{25}}$ となる．

(2) $\mathbb{R}^3$ のすべてのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ としたとき

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ となる行列は $A = \boxed{\mathbf{26}}$ である．

(3) $f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たす $\mathbb{R}^3$ のベクトルは $\boldsymbol{x} = c \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{27}} \\ \boxed{\mathbf{28}} \\ 1 \end{pmatrix}$ （c は任意定数）

と表される．

$\boxed{\textbf{24}}$ ・ $\boxed{\textbf{27}}$ ・ $\boxed{\textbf{28}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{1}{3}$　⑦ $\dfrac{2}{3}$　⑧ $\dfrac{1}{4}$

⑨ -1　ⓐ -2　ⓑ -3　ⓒ -4

ⓓ $-\dfrac{1}{2}$　ⓔ $-\dfrac{1}{3}$　ⓕ $-\dfrac{2}{3}$　ⓖ $-\dfrac{1}{4}$

$\boxed{\textbf{25}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$　⑥ $\begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} 3 \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\boxed{\textbf{26}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

⑥ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$　⑧ $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

⑨ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　ⓐ $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　ⓑ $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

問 4　連立 1 次方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} x - 3y + az = b \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x - 9y + 6z = -1 \end{cases}$$

について考える．ただし，a, b は実数とする．この方程式の係数行列 A，拡大係数行列 B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -9 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & a & b \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -9 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

とする．

(1)　$(*)$ が解を 1 つだけもつのは，$a \neq$ **29** のときである．

(2)　$(*)$ が解をもたないのは，$a =$ **29**，$b \neq$ **30** のときである．このとき，$\mathrm{rank}\, A =$ **31**，$\mathrm{rank}\, B =$ **32** である．

29 〜 **32** **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ −1	⑦ −2	⑧ −3	⑨ −4	ⓐ −5

計算用紙

問 5 行列

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

の対角化可能性について考える.

(1) A の固有値は $\boxed{\mathbf{33}}$（重複度 2）と 2 である.

(2) 3 次単位行列を E で表すと

$$\operatorname{rank}(A - \boxed{\mathbf{33}}\, E) = \boxed{\mathbf{34}}$$

であるから, A は $\boxed{\mathbf{35}}$.

$\boxed{\mathbf{33}}$ ・ $\boxed{\mathbf{34}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ −1	⑦ −2	⑧ −3	⑨ −4	ⓐ −5

$\boxed{\mathbf{35}}$ の解答群

⓪ 対角化可能である　① 対角化可能ではない

計算用紙

第３分野　常微分方程式

〔 問 1 ～ 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{36}}$ ～ $\boxed{\mathbf{50}}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．すべての微分方程式は関数が定義される範囲で考える．また，特殊解は特解ともいう．

問 1　微分方程式

$$(*) \qquad y' = \frac{3x+y-1}{x-1}$$

を $x > 1$ の範囲で考える．いま

$$z = \frac{y+2}{x-1}$$

とおくと，$(*)$ の右辺は

$$\frac{3x+y-1}{x-1} = z + \boxed{\mathbf{36}}$$

となることから，$(*)$ より $z(x)$ に関する微分方程式

$$(**) \qquad z' = \boxed{\mathbf{37}}$$

が得られる．$(**)$ の一般解を求めると

$$z(x) = \boxed{\mathbf{38}}$$

であるので，$(*)$ の一般解は $y = (x-1) \cdot \boxed{\mathbf{38}} - 2$ である．

$\boxed{\mathbf{36}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ -1	⑥ -2	⑦ -3	⑧ -4	⑨ $x-3$
ⓐ $-\dfrac{3}{x-1}$	ⓑ $\dfrac{3x+1}{x-1}$	ⓒ $\dfrac{3x-1}{x-1}$		

$\boxed{\mathbf{37}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{x+1}$　① $\dfrac{2}{x+1}$　② $\dfrac{3}{x+1}$　③ $\dfrac{1}{x-1}$

④ $\dfrac{2}{x-1}$　⑤ $\dfrac{3}{x-1}$　⑥ $\dfrac{z+1}{x+1}$　⑦ $\dfrac{2z+3}{x+1}$

⑧ $\dfrac{2z-1}{x+1}$　⑨ $\dfrac{z+2}{x-1}$　ⓐ $\dfrac{2z+1}{x-1}$　ⓑ $\dfrac{-2z+3}{x+1}$

$\boxed{\mathbf{38}}$ **の解答群**

⓪ $Cx+1$　① $Cx-1$　② $C(x+1)^2-1$

③ $C(x-1)^2-1$　④ $C(x+1)^3-1$　⑤ $C(x-1)^3-1$

⑥ $\log(x+1)+C$　⑦ $2\log(x+1)+C$　⑧ $3\log(x+1)+C$

⑨ $\log(x-1)+C$　ⓐ $2\log(x-1)+C$　ⓑ $3\log(x-1)+C$

(C は任意定数)

問 2　微分方程式

$$(*) \qquad y' + 3y = e^{-3x} \sin 2x$$

について考える．

(1)　対応する同次方程式

$$y' + 3y = 0$$

の一般解は，C を任意定数とすると

$$(**) \qquad y = C\ \boxed{\textbf{39}}$$

と表される．

$\boxed{\textbf{39}}$ **の解答群**

⓪ x	① x^3	② $\dfrac{1}{x}$	③ $\dfrac{1}{x^3}$
④ e^x	⑤ e^{3x}	⑥ e^{-x}	⑦ e^{-3x}
⑧ xe^x	⑨ xe^{-x}	ⓐ xe^{3x}	ⓑ xe^{-3x}
ⓒ $\sin 3x$	ⓓ $\cos 3x$		

(2)　$(**)$ において，C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて，$y = u(x) \cdot \boxed{\textbf{39}}$ を $(*)$ に代入すると

$$u' = \boxed{\textbf{40}}$$

が得られる．この方程式の一般解は，任意定数 $\tilde{C}$ を用いて

$$u(x) = \boxed{\textbf{41}} + \tilde{C}$$

となるので，$(*)$ の一般解は

$$({}_{*}{}^{*}{}_{*}) \qquad y = \left(\boxed{\textbf{41}} + \tilde{C}\right) \cdot \boxed{\textbf{39}}$$

である．

$\boxed{40}$ ・ $\boxed{41}$ の解答群

⓪ $\sin 2x$	① $2\sin 2x$	② $\dfrac{1}{2}\sin 2x$	③ $e^{-x}\sin 2x$
④ $-\sin 2x$	⑤ $-2\sin 2x$	⑥ $-\dfrac{1}{2}\sin 2x$	⑦ $-e^{-x}\sin 2x$
⑧ $\cos 2x$	⑨ $2\cos 2x$	ⓐ $\dfrac{1}{2}\cos 2x$	ⓑ $e^{-x}\cos 2x$
ⓒ $-\cos 2x$	ⓓ $-2\cos 2x$	ⓔ $-\dfrac{1}{2}\cos 2x$	ⓕ $-e^{-x}\cos 2x$
ⓖ $e^{-3x}\sin 2x$	ⓗ $e^{-3x}\cos 2x$		

(3) $({}_{*}^{*}{}_{*})$ において，$y(x)$ が初期条件 $y(0) = \dfrac{1}{2}$ を満たすように $\tilde{C}$ を定めると，$\tilde{C} = \boxed{42}$ となる．

$\boxed{42}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6
	⑦ -1	⑧ -2	⑨ -3	ⓐ -4	ⓑ -5	ⓒ -6

問 3　微分方程式

$$(*) \qquad y'' - 2y' - 3y = e^{3x}$$

について考える．

(1)　$(*)$ に対応する同次方程式

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

の一般解 y_h は任意定数 C_1, C_2 を用いて $y_h = \boxed{\mathbf{43}}$ と表される．

$\boxed{43}$ の解答群

⓪ $C_1e^{x} + C_2e^{-x}$　① $C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$　② $C_1e^{x} + C_2e^{-3x}$

③ $C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$　④ $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$　⑤ $C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$

⑥ $C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$　⑦ $C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$　⑧ $C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$

⑨ $C_1e^{x} + C_2xe^{x}$　ⓐ $C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$　ⓑ $C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$

ⓒ $C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$　ⓓ $C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$　ⓔ $C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$

ⓕ $C_1e^{x}\cos 2x + C_2e^{x}\sin 2x$　ⓖ $C_1e^{-x}\cos 3x + C_2e^{-x}\sin 3x$

(2)　一方，$y_p = \boxed{\mathbf{44}} \cdot e^{3x}$ は $(*)$ の特殊解の 1 つである．以上より，$(*)$ の一般解は

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \boxed{\mathbf{43}} + \boxed{\mathbf{44}} \cdot e^{3x}$$

である．

$\boxed{44}$ の解答群

⓪ 1　① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{4}$　③ -1　④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\frac{1}{4}$

⑥ x　⑦ $\frac{1}{2}x$　⑧ $\frac{1}{4}x$　⑨ $-x$　ⓐ $-\frac{1}{2}x$　ⓑ $-\frac{1}{4}x$

(3)　(2) で求めた $(*)$ の一般解は $x \to +\infty$ のとき $\boxed{\textbf{45}}$．

$\boxed{\textbf{45}}$ の解答群

⓪ 任意定数 C_1, C_2 の値によらず 0 に収束する

① 任意定数 C_1, C_2 の値によらず $+\infty$ に発散する

② 任意定数 C_1, C_2 の値によらず $-\infty$ に発散する

③ 任意定数 C_1, C_2 の値によって，0 に収束したり，$+\infty$ に発散したりする

④ 任意定数 C_1, C_2 の値によって，0 に収束したり，$-\infty$ に発散したりする

⑤ 任意定数 C_1, C_2 の値によって，$+\infty$ に発散したり，$-\infty$ に発散したりする

(4)　(2) で求めた $(*)$ の一般解 $y(x)$ が初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ を満たすのは

$$C_1 = \boxed{\textbf{46}}, \qquad C_2 = \boxed{\textbf{47}}$$

のときである．

$\boxed{\textbf{46}}$・$\boxed{\textbf{47}}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{2}$　① $\frac{1}{4}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{1}{8}$　④ $\frac{3}{8}$　⑤ $\frac{1}{16}$　⑥ $\frac{3}{16}$

⑦ $-\frac{1}{2}$　⑧ $-\frac{1}{4}$　⑨ $-\frac{3}{4}$　ⓐ $-\frac{1}{8}$　ⓑ $-\frac{3}{8}$　ⓒ $-\frac{1}{16}$　ⓓ $-\frac{3}{16}$

問 4　xy 平面上において，原点を焦点とし，x 軸を対称軸にもつすべての放物線を表す微分方程式を求める．これらの放物線は，C を 0 でない任意定数としたとき，原点からの距離と直線 $x = C$ からの距離が等しい点の軌跡であるので，放物線の方程式は

$$(*) \qquad x^2 + y^2 = \boxed{\textbf{48}}$$

で与えられる．$y \neq 0$ において，y を x の関数と考えて，方程式 $(*)$ の両辺を x で微分すると

$$(**) \qquad y' = \boxed{\textbf{49}}$$

が得られる．さらに，方程式 $(*)$ と $(**)$ から C を消去すると，$(*)$ を一般解としてもつ微分方程式

$$\boxed{\textbf{50}} = 0$$

が得られる．

$\boxed{48}$ の解答群

⓪ $x - C$	① $y - C$	② $x^2 + C^2$	③ $y^2 + C^2$
④ $(x - C)^2$	⑤ $(y - C)^2$	⑥ $\sqrt{x - C}$	⑦ $\sqrt{y - C}$
⑧ $\sqrt{x^2 + C^2}$	⑨ $\sqrt{y^2 + C^2}$	ⓐ $x - y - C$	ⓑ $(x - y - C)^2$

$\boxed{49}$ の解答群

⓪ $2xy + C$	① $-2xy + C$	② $\dfrac{1}{2}xy + C$	③ $-\dfrac{1}{2}xy + C$
④ $\dfrac{1 - x}{4xy + C}$	⑤ $\dfrac{1 - y}{4xy + C}$	⑥ $\dfrac{x}{4y\sqrt{x - C}}$	⑦ $\dfrac{y}{4x\sqrt{x - C}}$
⑧ $\dfrac{C}{x + 1}$	⑨ $\dfrac{C}{y + 1}$	ⓐ $-\dfrac{C}{x}$	ⓑ $-\dfrac{C}{y}$

$\boxed{\mathbf{50}}$ **の解答群**

⓪ $(y')^2 + \dfrac{x}{y}y' - 1$　① $\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)y' - 1$　② $y' + \dfrac{x}{y} - 1$

③ $(y')^2 + \dfrac{2x}{y}y' - 1$　④ $\left(1 + \dfrac{2x}{y}\right)y' - 1$　⑤ $y' + \dfrac{2x}{y} - 1$

⑥ $(y')^2 + 2xy' - 1$　⑦ $(1 + 2x)\,y' - 1$　⑧ $y' + 2x - 1$

第4分野　確率・統計

〔問1～問4：解答番号 $\boxed{51}$ ～ $\boxed{68}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$，$V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問1　(1)　確率変数 X の確率分布が

X の値	-1	0	1	2
確率	$\frac{1}{2k}$	$\frac{3}{4k}$	$\frac{5}{8k}$	$\frac{1}{8k}$

(k は正の定数)

で与えられている．このとき，$k=$ $\boxed{51}$ であり，$E(X)=$ $\boxed{52}$ が成り立つ．また $Y=2X+2$ であるとき，$E(Y)=$ $\boxed{53}$, $V(Y)=$ $\boxed{54}$ である．

$\boxed{51}$ ～ $\boxed{54}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 4	④ $\frac{1}{2}$	⑤ $\frac{1}{4}$
⑥ $\frac{1}{6}$	⑦ $\frac{7}{8}$	⑧ $\frac{19}{8}$	⑨ $\frac{1}{16}$	ⓐ $\frac{3}{16}$	ⓑ $\frac{9}{16}$
ⓒ $\frac{13}{16}$	ⓓ $\frac{15}{16}$	ⓔ $\frac{9}{64}$	ⓕ $\frac{15}{64}$	ⓖ $\frac{149}{64}$	ⓗ $\frac{199}{64}$

(2) 確率変数 X がパラメータ 5 のポアソン分布に従っているとする．すなわち

$$P(X=k) = e^{-5}\frac{5^k}{k!} \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

とする．このとき，$V(X) =$ **55** であり

$$P(0 \leqq X \leqq 2) = \boxed{\mathbf{56}}$$

となる．

55 の解答群

⓪ 0　① 1　② 5　③ 25　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{25}$

⑥ e^{-1}　⑦ $\frac{e^{-1}}{5}$　⑧ $\frac{e^{-1}}{120}$　⑨ e^{-5}　ⓐ $\frac{e^{-5}}{5}$　ⓑ $\frac{e^{-5}}{120}$

56 の解答群

⓪ $\frac{13(1+e^{-1}+e^{-2})}{2}$　① $\frac{35(1+e^{-1}+e^{-2})}{2}$　② $\frac{37(1+e^{-1}+e^{-2})}{2}$

③ $\frac{13\,e^{-5}}{2}$　④ $\frac{35\,e^{-5}}{2}$　⑤ $\frac{37\,e^{-5}}{2}$

問 2 a を定数とする．確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} axe^{-\frac{x^2}{2}} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で与えられている．

(1) このとき $a = \boxed{\mathbf{57}}$ である．また $P\left(\sqrt{\log 4} \leqq X \leqq \sqrt{\log 16}\right) = \boxed{\mathbf{58}}$ が成り立つ．

$\boxed{57}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② -1　③ e　④ $-e$　⑤ e^{-1}　⑥ $-e^{-1}$

$\boxed{58}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}$　① $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　② $\dfrac{1}{4}$　③ $\log 2$　④ $\dfrac{\sqrt{\log 2}}{2}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{\log 2}}{4}$

⑥ $\sqrt{\log 16} - \sqrt{\log 4}$　⑦ $\dfrac{\sqrt{\log 16} - \sqrt{\log 4}}{4}$

(2) X の分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とすると

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \boxed{\mathbf{59}} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

である．

$\boxed{59}$ の解答群

⓪ $-e^{x^2}$　① $-e^{-x^2}$　② $-e^{\frac{x^2}{2}}$　③ $-e^{-\frac{x^2}{2}}$

④ $-\dfrac{1}{2}e^{x^2}$　⑤ $-xe^{-x^2}$　⑥ $-\dfrac{1}{2}e^{\frac{x^2}{2}}$　⑦ $-xe^{-\frac{x^2}{2}}$

⑧ e^{x^2}　⑨ e^{-x^2}　ⓐ $e^{\frac{x^2}{2}}$　ⓑ $e^{-\frac{x^2}{2}}$

計算用紙

問 3　3 つの事象 A, B, C の確率が

$$P(A) = \frac{1}{8}, \qquad P(B) = \frac{1}{3}, \qquad P(C) = \frac{1}{4}$$

であるとする.

(1)　$P(A \cap B) = \dfrac{1}{12}$ のとき, A と B は $\boxed{\textbf{60}}$. また, このとき $P(A \cup B) = \boxed{\textbf{61}}$ である.

(2)　事象 C が起こったときの事象 B の起こる条件付き確率を $P(B\,|\,C)$ で表す. $P(B\,|\,C) = \dfrac{1}{6}$ のとき, $P(B \cap C) = \boxed{\textbf{62}}$ であり, よって $P(C\,|\,B) = \boxed{\textbf{63}}$ である.

(3)　$A \subset C$ のとき, $P(A\,|\,C) = \boxed{\textbf{64}}$ である.

$\boxed{\textbf{60}}$ の解答群

⓪ 独立である　　① 従属である（独立ではない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

$\boxed{\textbf{61}}$ ～ $\boxed{\textbf{64}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\frac{1}{2}$	③ $\frac{1}{3}$	④ $\frac{2}{3}$	⑤ $\frac{1}{4}$
⑥ $\frac{3}{4}$	⑦ $\frac{1}{6}$	⑧ $\frac{5}{6}$	⑨ $\frac{1}{8}$	ⓐ $\frac{3}{8}$	ⓑ $\frac{5}{8}$
ⓒ $\frac{1}{12}$	ⓓ $\frac{5}{12}$	ⓔ $\frac{7}{12}$	ⓕ $\frac{1}{24}$	ⓖ $\frac{5}{24}$	ⓗ $\frac{7}{24}$

計算用紙

問 4 A 大学の植物園では，毎年ある植物を栽培し，その草丈(くさたけ)を測定している．これまでの経験から，この植物の草丈は正規分布に従い，草丈の母分散は年によって変化はなく，10.5^2 cm^2 と仮定してよいことがわかっている．昨年までの草丈の母平均は 55.1 cm であったが，今年は晴天の日が多くまた気候も穏やかであったため，例年より草丈が高くなることが予想されている．今年育った植物の中から 100 本を無作為に抽出し草丈を測ったところ，それらの平均は 57.3 cm であった．

この植物の草丈について，母平均 μ の変化を調べるために，$\mu_0 = 55.1$，$\sigma^2 = 10.5^2$，$\bar{x} = 57.3$，$n = 100$ とおき，μ に対する

帰無仮説 H_0 : $\mu = \mu_0$

対立仮説 H_1 : $\mu > \mu_0$

の片側検定を有意水準 5% で行うことにした．選び出した 100 本の草丈をそれぞれ確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とすると，これらはすべて独立で平均 μ，分散 10.5^2 の正規分布に従っている．したがって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

は平均 $\boxed{\textbf{65}}$，分散 $\boxed{\textbf{66}}$ の正規分布に従う．帰無仮説 H_0 のもとでは

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 55.1}{10.5/\sqrt{100}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従い，正規分布表から

$$P(-1.645 < Z < 1.645) \fallingdotseq 0.9$$

がわかる．この式から，$1.645 \times \dfrac{10.5}{\sqrt{100}} \fallingdotseq 1.727$ に注意すると

$$P(\overline{X} - 55.1 \geqq 1.727) \fallingdotseq \boxed{\textbf{67}}$$

となる．一方，$\bar{x}$ は

$$\bar{x} - 55.1 = 57.3 - 55.1 = 2.2 > 1.727$$

を満たすので，H_0 は有意水準 5% で $\boxed{\textbf{68}}$．

$\boxed{\textbf{65}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{\mu}{100}$　① $\dfrac{\mu}{10}$　② μ　③ 10μ　④ 100μ　⑤ 10.5μ　⑥ $10.5^2\mu$

$\boxed{\textbf{66}}$ **の解答群**

⓪ 100×10.5　① 100×10.5^2　② $100^2 \times 10.5^2$　③ 10.5^2

④ $\dfrac{10.5}{100}$　⑤ $\dfrac{10.5^2}{100}$　⑥ $\dfrac{10.5}{100^2}$　⑦ $\dfrac{10.5^2}{100^2}$

$\boxed{\textbf{67}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 0.05　② 0.1　③ 0.15　④ 0.2　⑤ 0.25

⑥ 0.75　⑦ 0.8　⑧ 0.85　⑨ 0.9　ⓐ 0.95

$\boxed{\textbf{68}}$ **の解答群**

⓪ 採択される　① 棄却される