EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2022年12月10日（土）
4分野受験 午後1時30分 ～ 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 ～ 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時10分

＊受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．

(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．

(8) 問題冊子は持ち帰ること．

(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は, 前に現れた番号であることを表す．したがって, 例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\mathbf{23}}$ は ($\boxed{\mathbf{23}}$) という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2 - \boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

(6) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

目次

第１分野　微分積分

〔問１〜問５：解答番号 $\boxed{\textbf{1}}$ 〜 $\boxed{\textbf{18}}$〕

問１　次の２つの極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin 3x}{x + 3\sin x} = \boxed{\textbf{1}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+4} + x\right) = \boxed{\textbf{2}}$$

$\boxed{\textbf{1}}$ ・ $\boxed{\textbf{2}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{3}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{4}$　⑥ $\dfrac{3}{4}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ $-\dfrac{1}{2}$　ⓐ $-\dfrac{3}{2}$　ⓑ $-\dfrac{1}{4}$　ⓒ $-\dfrac{3}{4}$

ⓓ ∞　ⓔ $-\infty$

計算用紙

問 2 関数 $y=\sin^{-1}x\ \ (-1<x<1)$ について考える．まず $y'=\dfrac{dy}{dx}$, $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を計算すると

$$y'=\boxed{\mathbf{3}},\qquad y''=\boxed{\mathbf{4}}$$

より，y は関係式

$$(1-x^2)y''-xy'=0$$

を満たす．この式の両辺を x について微分すると

$$\left\{(1-x^2)y''-xy'\right\}'=(1-x^2)y'''+\boxed{\mathbf{5}}\,xy''-y'=0$$

となり，$x=0$ を代入すれば，$y'''(0)=\boxed{\mathbf{6}}$ である．

$\boxed{\mathbf{3}}$・$\boxed{\mathbf{4}}$ の解答群

⓪ $\sin^{-1}x$　① $-\sin^{-1}x$　② $\cos^{-1}x$　③ $-\cos^{-1}x$

④ $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　⑤ $-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　⑥ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　⑦ $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

⑧ $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$　⑨ $-\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

ⓐ $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$　ⓑ $-\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

ⓒ $\dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$　ⓓ $-\dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

ⓔ $\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$　ⓕ $-\dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$・$\boxed{\mathbf{6}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

計算用紙

問 3　(1)　不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$ を求める．被積分関数は

$$\frac{3x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\boxed{\mathbf{7}}}{x-1} + \frac{\boxed{\mathbf{8}}\,x+1}{x^2+1}$$

と部分分数に展開されるので

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \log|x-1| \\ \displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \boxed{\mathbf{9}} \qquad\qquad \text{（積分定数は省略）} \\ \displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \boxed{\mathbf{10}} \end{cases}$$

を用いると

$$I = \boxed{\mathbf{7}}\log|x-1| + \boxed{\mathbf{8}} \cdot \boxed{\mathbf{9}} + \boxed{\mathbf{10}} + C \qquad (C \text{ は積分定数})$$

である．

7・**8** の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{3}{2}$　⑥ $\frac{5}{2}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ $-\frac{1}{2}$　ⓑ $-\frac{3}{2}$　ⓒ $-\frac{5}{2}$

9・**10** の解答群

⓪ $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$　① $\sin^{-1} x$　② $\log(x^2+1)$

③ $-\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$　④ $-\sin^{-1} x$　⑤ $-\log(x^2+1)$

⑥ $\dfrac{2}{(x^2+1)^2}$　⑦ $\tan^{-1} x$　⑧ $\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)$

⑨ $-\dfrac{2}{(x^2+1)^2}$　ⓐ $-\tan^{-1} x$　ⓑ $-\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)$

(2)　曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (0 \leqq x \leqq \log 2)$ の長さ L は

$$L = \int_0^{\log 2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^{\log 2} \boxed{\textbf{11}}\, dx = \boxed{\textbf{12}}$$

である.

$\boxed{\textbf{11}}$ の解答群

⓪ $e^x + e^{-x}$　① $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$　② $e^{2x} + e^{-2x}$　③ $\dfrac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$

④ $e^x - e^{-x}$　⑤ $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$　⑥ $e^{2x} - e^{-2x}$　⑦ $\dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

$\boxed{\textbf{12}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{3}{2}$　⑥ $\dfrac{5}{2}$

⑦ $\dfrac{1}{4}$　⑧ $\dfrac{3}{4}$　⑨ $\dfrac{5}{4}$　ⓐ $\dfrac{7}{4}$　ⓑ $\dfrac{9}{4}$　ⓒ $\dfrac{11}{4}$

問 4　2 変数関数 $f(x,y)=x^3+y^3+3xy+2$ の極値について考える．

(1)　連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

の解は $(x,y)=(0,0)$ と $(x,y)=$ $\boxed{\mathbf{13}}$ の 2 つである．

$\boxed{\mathbf{13}}$ の解答群

⓪ $(1,0)$	① $(0,1)$	② $(-1,0)$	③ $(0,-1)$
④ $(1,1)$	⑤ $(1,-1)$	⑥ $(-1,1)$	⑦ $(-1,-1)$

(2)　関数 $H(x,y)$ を

$$H(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right\}^2$$

と定める．点 $(x,y)=$ $\boxed{\mathbf{13}}$ において $H(x,y)=$ $\boxed{\mathbf{14}}$ かつ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)<0$ であるから，$f(x,y)$ はこの点において $\boxed{\mathbf{15}}$．

$\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ 0

① 1	② 3	③ 4	④ 6	⑤ 9	⑥ 27	⑦ 36	⑧ 45
⑨ -1	ⓐ -3	ⓑ -4	ⓒ -6	ⓓ -9	ⓔ -27	ⓕ -36	ⓖ -45

$\boxed{\mathbf{15}}$ の解答群

⓪ 極大値をとる　① 極小値をとる　② 極値をとらない

計算用紙

問 5　xy 平面内の集合 D が

$$D = \left\{(x, y) \mid x + y \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D e^{-(x+y)^2}\, dxdy$$

の値を求める．変数変換 $x = u - v,\ y = v$ を行うと，集合 D は uv 平面内の集合

$$E = \left\{(u, v) \mid 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq \boxed{\textbf{16}}\right\}$$

に対応する．この変換のヤコビ行列式（ヤコビアン）は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \boxed{\textbf{17}}$$

である．これらを用いると $I = \boxed{\textbf{18}}$ を得る．

16 ・ **17** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{1}{2}$	④ $\dfrac{1}{3}$	⑤ $\dfrac{1}{4}$
⑥ u	⑦ v	⑧ $u+v$	⑨ $u-v$	ⓐ $v-u$	ⓑ uv

18 の解答群

⓪ 0	① $\dfrac{1}{2}(e+1)$	② $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{e}\right)$	③ $\dfrac{1}{2}\left(e+\dfrac{1}{e}\right)$
	④ $\dfrac{1}{2}(e-1)$	⑤ $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$	⑥ $\dfrac{1}{2}\left(e-\dfrac{1}{e}\right)$

計算用紙

第2分野　線形代数

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{19}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{36}}$ 〕

(注意) 行列 A に対し，$\mathrm{rank}\,A$ は A の階数（ランク）を表す.

問 1　行列 $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ について考える.

(1)　A の行列式は $|A| = \boxed{\mathbf{19}}$ である.

$\boxed{\mathbf{19}}$ **の解答群**

⓪ 0

① $1 + x + x^2 + x^3$　　② $1 - x + x^2 - x^3$

③ $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$　　④ $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$

⑤ $-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3$　　⑥ $4 + 3x + 2x^2 + x^3$

⑦ $4 - 3x + 2x^2 - x^3$　　⑧ $-4 + 3x - 2x^2 + x^3$

(2)　$x = 0$ のとき A は逆行列 A^{-1} をもち，このとき A^{-1} の $(3, 2)$ 成分は $\boxed{\mathbf{20}}$ である.

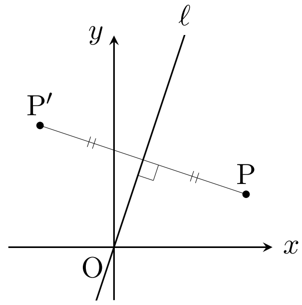
$\boxed{\mathbf{20}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{4}$　⑥ $\dfrac{3}{4}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ $-\dfrac{1}{2}$　ⓑ $-\dfrac{1}{4}$　ⓒ $-\dfrac{3}{4}$

計算用紙

問 2　(1)　平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を直線 ℓ: $y = 3x$ に関して線対称な点 $\mathrm{P}'(x', y')$ にうつす変換について考える．2 つの点 P, P' の中点は ℓ 上にあることから $\boxed{\mathbf{21}}$ が成り立ち，直線 ℓ と線分 PP' は直交するから $\boxed{\mathbf{22}}$ が成り立つ．連立方程式 $\boxed{\mathbf{21}}$，$\boxed{\mathbf{22}}$ より x', y' を x, y を用いて表すと，線形変換



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \boxed{\mathbf{23}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

を得る．

$\boxed{\mathbf{21}}$ ・ $\boxed{\mathbf{22}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x + x'}{2} = 3\dfrac{y + y'}{2}$　　① $\dfrac{x - x'}{2} = 3\dfrac{y - y'}{2}$

② $\dfrac{y + y'}{2} = 3\dfrac{x + x'}{2}$　　③ $\dfrac{y - y'}{2} = 3\dfrac{x - x'}{2}$

④ $3\dfrac{x' + x}{y' + y} = -1$　　⑤ $3\dfrac{x' - x}{y' - y} = -1$

⑥ $3\dfrac{y' + y}{x' + x} = -1$　　⑦ $3\dfrac{y' - y}{x' - x} = -1$

$\boxed{\mathbf{23}}$ の解答群

⓪ $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$　⑥ $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

(2) xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{A}(1,-2,-3)$, $\mathrm{B}(2,0,-1)$, $\mathrm{C}(4,-2,0)$ を考える．このとき，2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角は $\boxed{\mathbf{24}}$ である．また，3 点 A, B, C を含む平面の方程式は $\boxed{\mathbf{25}}$ $=6$ となる．

$\boxed{\mathbf{24}}$ の解答群

⓪ 0

① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$

⑤ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑥ $\dfrac{3}{4}\pi$　⑦ $\dfrac{5}{6}\pi$　⑧ π

$\boxed{\mathbf{25}}$ の解答群

⓪ $x+y+z$　① $x+y-z$　② $x-y+z$　③ $x-y-z$

④ $x+y+2z$　⑤ $x+y-2z$　⑥ $x-y+2z$　⑦ $x-y-2z$

⑧ $2x+y+2z$　⑨ $2x+y-2z$　ⓐ $2x-y+2z$　ⓑ $2x-y-2z$

問 3　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ における 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

について考える.

(1)　ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ は $\mathbb{R}^3$ において $\boxed{\mathbf{26}}$ である.

$\boxed{\mathbf{26}}$ の解答群

⓪ 1 次独立（線形独立）　　① 1 次従属（線形従属）

(2)　ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の 1 次結合（線形結合）

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 \qquad (c_1, c_2, c_3 \text{ は定数})$$

として表す．この式を c_1, c_2, c_3 に関する連立 1 次方程式とみなして解くと

$$c_1 = \boxed{\mathbf{27}}, \quad c_2 = \boxed{\mathbf{28}}, \quad c_3 = -\frac{1}{4}$$

となる.

$\boxed{\mathbf{27}}$ ・ $\boxed{\mathbf{28}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$　⑥ $\frac{3}{4}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ $-\frac{1}{4}$　ⓑ $-\frac{1}{2}$　ⓒ $-\frac{3}{4}$

計算用紙

問 4 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ を用いて線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ により定める.

(1) $\operatorname{rank} A = \boxed{\textbf{29}}$ である.

(2) f の核 $\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ を求めるために連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解くと, その解は任意定数 s, t により

$$\boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{30}} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ \boxed{\textbf{31}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される. したがって $\operatorname{Ker} f$ の次元は $\boxed{\textbf{32}}$ である.

(3) f の像 $\operatorname{Im} f = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元は $\boxed{\textbf{33}}$ である.

$\boxed{\textbf{29}}$ 〜 $\boxed{\textbf{33}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6
	⑦ -1	⑧ -2	⑨ -3	ⓐ -4	ⓑ -5	ⓒ -6

計算用紙

問 5　定数 a に対し，行列 $A = \begin{pmatrix} a & a-1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の対角化可能性について考える．

(1)　A の固有方程式を解くと，$a \neq \boxed{\textbf{34}}$ のとき，A の固有値は a（重複度 2）と $\boxed{\textbf{34}}$ である．また，ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\textbf{35}} \\ \boxed{\textbf{35}}^{\,2} \end{pmatrix}$$

は固有値 $\boxed{\textbf{34}}$ の固有ベクトルとなる．

(2)　$a = \boxed{\textbf{36}}$ のとき，A の 1 次独立（線形独立）な固有ベクトルが 3 つとれる．したがって，このとき A は対角化可能である．また $a \neq \boxed{\textbf{36}}$ のとき，A は対角化可能ではない．

34 ・ **36** の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ -1　⑤ -2　⑥ -3

35 の解答群

⓪ a　① $a-1$　② $a-2$　③ $2a$　④ $2a-1$　⑤ $2a-3$

⑥ $-a$　⑦ $1-a$　⑧ $2-a$　⑨ $-2a$　ⓐ $1-2a$　ⓑ $3-2a$

計算用紙

第3分野　常微分方程式

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{37}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{53}}$ 〕

(注意)　各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．すべての微分方程式は関数が定義される範囲で考える．また，特殊解は特解ともいう．

問 1　微分方程式

$$(*) \qquad y' = 2(2-x)y^2$$

について考える．

(1)　$(*)$ の一般解は任意定数 C を用いて

$$y = \boxed{\mathbf{37}}$$

で与えられる．

$\boxed{\mathbf{37}}$ の解答群

⓪ $x + C$	① $x^2 - 4x + C$	② $x^2 - 2x + C$
③ $\dfrac{1}{x} + C$	④ $\dfrac{1}{x^2 - 4x} + C$	⑤ $\dfrac{1}{x^2 - 2x} + C$
⑥ $\dfrac{1}{x + C}$	⑦ $\dfrac{1}{x^2 - 4x + C}$	⑧ $\dfrac{1}{x^2 - 2x + C}$

(2)　$(*)$ の解 $y(x) = \boxed{\mathbf{37}}$ が初期条件

$$y(0) = \frac{1}{10}$$

を満たすとき，$C = \boxed{\mathbf{38}}$ である．

$\boxed{\mathbf{38}}$ の解答群

⓪ 0	① 2	② 4	③ 6	④ 8	⑤ 10
	⑥ $\dfrac{1}{2}$	⑦ $\dfrac{1}{4}$	⑧ $\dfrac{1}{6}$	⑨ $\dfrac{1}{8}$	ⓐ $\dfrac{1}{10}$

(3)　(2) の解 $y(x)$ は実数 x について常に正の値をとり，$x <$ $\boxed{\textbf{39}}$ のとき $y'(x) > 0$ であり，$x >$ $\boxed{\textbf{39}}$ のとき $y'(x) < 0$ である．したがって $y(x)$ は $x =$ $\boxed{\textbf{39}}$ において最大値 $\boxed{\textbf{40}}$ をとる．

$\boxed{\textbf{39}}$ ・ $\boxed{\textbf{40}}$ の解答群

⓪ 0	① 2	② 4	③ 6	④ 8	⑤ 10
	⑥ $\dfrac{1}{2}$	⑦ $\dfrac{1}{4}$	⑧ $\dfrac{1}{6}$	⑨ $\dfrac{1}{8}$	ⓐ $\dfrac{1}{10}$

問 2 解答群にある微分方程式の中から，以下の文章にあてはまるものをそれぞれ 1 つ選べ．

(1) 関数 $y = \cos 2x - \sin 2x$ を解としてもつ微分方程式は $\boxed{\textbf{41}}$ である．

(2) 関数 $y = 2e^{4x}$ を解としてもつ微分方程式は $\boxed{\textbf{42}}$ である．

(3) 関数 $y = 4e^{2x}$ を解としてもつが，$y = 4e^{-2x}$ を解としてもたない微分方程式は $\boxed{\textbf{43}}$ である．

(4) 微分方程式 $\boxed{\textbf{44}}$ の一般解 $y = y(x)$ は $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = 4$ を満たす．

$\boxed{\textbf{41}}$ ～ $\boxed{\textbf{44}}$ **の解答群**

⓪ $y' - 4 = 0$	① $y' + 4 = 0$
② $y' - 2y = 0$	③ $y' + 2y = 0$
④ $y'' - 2y = 0$	⑤ $y'' + 2y = 0$
⑥ $y'' - 4y = 0$	⑦ $y'' + 4y = 0$
⑧ $y'' - 3y' - 4y = 0$	⑨ $y'' - 3y' + 4y = 0$

計算用紙

問 3　微分方程式

$$(*) \qquad y' - 2y + \frac{1}{3}y^2 = 0$$

を初期条件 $y(0) = 1$ のもとで考える．

(1)　$y(x) = \dfrac{1}{z(x)}$ とおいて方程式 $(*)$ に代入すると，z に関する微分方程式

$$(**) \qquad \frac{dz}{dx} = \boxed{\mathbf{45}}$$

が得られる．

$\boxed{\mathbf{45}}$ **の解答群**

⓪ $2z + \dfrac{1}{3}$　① $-2z + \dfrac{1}{3}$　② $2x + \dfrac{1}{3}$　③ $-2x + \dfrac{1}{3}$

④ $\dfrac{2}{z} + 3$　⑤ $-\dfrac{2}{z} + 3$　⑥ $\dfrac{2}{x} + 3$　⑦ $-\dfrac{2}{x} + 3$

(2)　初期条件 $z(0) = \dfrac{1}{y(0)} = 1$ を満たす方程式 $(**)$ の解は

$$z(x) = \boxed{\mathbf{46}}$$

である．このとき $y(x) = \dfrac{1}{\boxed{\mathbf{46}}}$ より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y(x) = \boxed{\mathbf{47}}$ となる．

$\boxed{\mathbf{46}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{2}e^{-x} + \dfrac{1}{2}$　① $2e^{x} - 1$　② $\dfrac{5}{4}e^{-x} - \dfrac{1}{4}$

③ $\dfrac{5}{3}e^{-2x} - \dfrac{2}{3}$　④ $3e^{-2x} - 2$　⑤ $\dfrac{4}{5}e^{2x} + \dfrac{1}{5}$

⑥ $\dfrac{5}{6}e^{-2x} + \dfrac{1}{6}$　⑦ $-5e^{-x} + 6$　⑧ $\dfrac{7}{6}e^{2x} - \dfrac{1}{6}$

$\boxed{\mathbf{47}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 4　④ 6　⑤ ∞

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -4　⑨ -6　ⓐ $-\infty$

計算用紙

問 4 微分方程式

$$(*) \qquad y'' - 4y' + 4y = -25\cos x$$

の一般解を求める．

(1) $(*)$ の特殊解を

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x$$

とおくと

$$A = \boxed{\textbf{48}}, \quad B = \boxed{\textbf{49}}$$

である．

48 ・ **49** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

(2) $(*)$ に対応する同次方程式

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

の一般解は $y_h = \boxed{\textbf{50}}$ と表される．よって，$(*)$ の一般解は

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \boxed{\textbf{50}} + \boxed{\textbf{48}}\cos x + \boxed{\textbf{49}}\sin x$$

である．

50 の解答群

⓪ $C_1e^{x} + C_2e^{-x}$	① $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$	② $C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$
③ $C_1e^{x} + C_2e^{2x}$	④ $C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$	⑤ $C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$
⑥ $C_1e^{x} + C_2xe^{x}$	⑦ $C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$	⑧ $C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

$(C_1, C_2$ は任意定数$)$

計算用紙

問 5　xy 平面において，正の実数 C をパラメータとする楕円群

$$(*) \qquad x^2 + 2y^2 = C$$

を考える．xy 平面から x 軸および y 軸を除いた領域において，$(*)$ で表されるすべての楕円と直交する曲線を求めたい．ここで，2 つの曲線が直交するとは，これらの曲線の交点において，それぞれの接線が直交するときをいう．まず，$(*)$ の両辺を x で微分することにより

$$y' = \boxed{\mathbf{51}}$$

が得られる．これは，楕円 $x^2 + 2y^2 = C$ 上の点 (x, y) での接線の傾きを表している．よって，$(*)$ で表される楕円に直交する曲線は

$$y' = \boxed{\mathbf{52}}$$

を満たす．この微分方程式を解くことにより，求める曲線の方程式は

$$y = \boxed{\mathbf{53}}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{51}}$ ・ $\boxed{\mathbf{52}}$ の解答群

⓪ $2xy$　① xy^2　② $\dfrac{2x}{y}$　③ $\dfrac{x}{2y}$　④ $\dfrac{2y}{x}$　⑤ $\dfrac{y}{2x}$

⑥ $-\dfrac{1}{2xy}$　⑦ $-\dfrac{1}{xy^2}$　⑧ $-\dfrac{2x}{y}$　⑨ $-\dfrac{x}{2y}$　ⓐ $-\dfrac{2y}{x}$　ⓑ $-\dfrac{y}{2x}$

$\boxed{\mathbf{53}}$ の解答群

⓪ Ax　① $x + A$　② Ax^2　③ $x^2 + A$

④ $A\sqrt{x}$　⑤ $\sqrt{x} + A$　⑥ Ax^3　⑦ $x^3 + A$

(A は 0 でない定数)

計算用紙

第4分野　確率・統計

〔問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{54}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{71}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$，$V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1　(1)　確率変数 X の確率分布が

X の値	-4	0	2	4
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{8}$

(a は定数)

で与えられている．このとき，$a = \boxed{\mathbf{54}}$ であり，

$$E(X) = \boxed{\mathbf{55}}, \qquad V(X) = \boxed{\mathbf{56}}$$

が成り立つ．さらに，$Y = 3 - X$ に対し

$$E(Y) = 2, \qquad V(Y) = \boxed{\mathbf{57}}$$

が成り立つ．

$\boxed{54}$ 〜 $\boxed{57}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ 6　⑦ -2　⑧ -5　⑨ $\frac{1}{2}$　ⓐ $\frac{1}{4}$　ⓑ $\frac{3}{4}$

ⓒ $\frac{1}{8}$　ⓓ $\frac{3}{8}$　ⓔ $\frac{5}{8}$　ⓕ $\frac{7}{8}$　ⓖ $\frac{1}{16}$

(2) 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が，正の定数 α, β によって

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\beta x} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で与えられていて，$E(X) = 4$ が成り立つとする．このとき，

$\alpha = \boxed{\textbf{58}}$，　$\beta = \boxed{\textbf{59}}$

であり，$P(-1 < X \leqq 2) = \boxed{\textbf{60}}$ である．

$\boxed{58}$ 〜 $\boxed{60}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 4
④ $\dfrac{1}{2}$	⑤ $\dfrac{1}{4}$	⑥ $1 - e^{-1}$	⑦ $1 - e^{-2}$
⑧ $1 - e^{-4}$	⑨ $1 - e^{-8}$	ⓐ $1 - e^{-\frac{1}{2}}$	ⓑ $1 - e^{-\frac{1}{4}}$
ⓒ $e - e^{-2}$	ⓓ $e^2 - e^{-4}$	ⓔ $e^{\frac{1}{2}} - e^{-1}$	ⓕ $e^{\frac{1}{4}} - e^{-\frac{1}{2}}$

問 2　確率変数 X, Y は独立で同じ分布に従い，その分布関数

$$F(x) = P(X \leqq x) = P(Y \leqq x)$$

について，$F(3) = \dfrac{2}{3}$ が成り立つと仮定する．このとき，$P(X \leqq 3, Y > 3) =$ $\boxed{\textbf{61}}$ である．また，確率変数 S, T を

$$S = \max(X, Y) = \begin{cases} X & (X \geqq Y \text{ のとき}) \\ Y & (X < Y \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$T = \min(X, Y) = \begin{cases} Y & (X \geqq Y \text{ のとき}) \\ X & (X < Y \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．このとき，

$$P(S \leqq x) = \boxed{\textbf{62}}, \qquad P(T \leqq x) = \boxed{\textbf{63}}$$

が成り立つ．また，確率変数 S, T は $\boxed{\textbf{64}}$ ．

$\boxed{\textbf{61}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{1}{4}$　⑥ $\dfrac{3}{4}$

⑦ $\dfrac{1}{6}$　⑧ $\dfrac{5}{6}$　⑨ $\dfrac{1}{9}$　ⓐ $\dfrac{2}{9}$　ⓑ $\dfrac{4}{9}$　ⓒ $\dfrac{5}{9}$

$\boxed{\textbf{62}}$ ・ $\boxed{\textbf{63}}$ の解答群

⓪ $F(x)$　① $F(x)^2$　② $1 - F(x)$

③ $1 - F(x)^2$　④ $F(x) - F(x)^2$　⑤ $F(x)^2 - F(x)$

⑥ $2F(x) - F(x)^2$　⑦ $F(x) - 2F(x)^2$　⑧ $2F(x)^2 - F(x)$

⑨ $F(x)^2 - 2F(x)$

$\boxed{\mathbf{64}}$ **の解答群**

⓪ 独立である　① 従属である（独立でない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

問 3 ある工業製品は，a, b の 2 社で 3 : 2 の割合で生産されている．a 社が自社の製品を調査したところ，不良品の割合は 5% であった．同様に，b 社では不良品の割合が 10% であった．生産された工業製品の中から無作為に取り出した 1 個が a, b 社の製品である事象をそれぞれ A, B とし，その取り出した 1 個が不良品である事象を F とする．このとき

$$P(A) = \frac{3}{5}, \quad P(B) = \frac{2}{5}, \quad P(F|A) = 0.05, \quad P(F|B) = 0.1$$

である．ここで，2 つの事象 C, D に対し，$P(C|D)$ は D が起こったときの C が起こる条件付き確率を表す．このとき，取り出した 1 個が不良品である確率は

$$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) = \boxed{\textbf{65}}$$

である．また，取り出した 1 個が不良品であったとき，それが a 社の製品である確率は

$$P(A|F) = \boxed{\textbf{66}}$$

である．

$\boxed{65}$ ・ $\boxed{66}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{3}$	① $\frac{2}{3}$	② $\frac{1}{5}$	③ $\frac{2}{5}$	④ $\frac{3}{5}$
⑤ $\frac{1}{7}$	⑥ $\frac{3}{7}$	⑦ $\frac{4}{7}$	⑧ $\frac{1}{10}$	⑨ $\frac{1}{20}$
ⓐ $\frac{3}{20}$	ⓑ $\frac{1}{25}$	ⓒ $\frac{1}{100}$	ⓓ $\frac{3}{100}$	ⓔ $\frac{7}{100}$

計算用紙

問 4 A 大学の U 教授の研究室では，キャンパスの池に生息するある種類のカエルの体長の調査を数年ぶりに行った．この池に生息するカエルの体長は正規分布に従い，体長の母分散は年によって変化はなく，20^2 mm^2 と仮定してよいことがわかっている．池からカエル 100 匹を無作為に捕まえてその体長を測定したところ，100 匹の標本平均値は 120 mm であった．この測定結果を用いて，池のカエルの体長の母平均 μ mm に関して，信頼度（信頼係数）95% の信頼区間を求めたい．

捕まえた 100 匹のカエルの体長を表す確率変数をそれぞれ $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とおくと，これらは独立で，すべて平均 μ，分散 20^2 の正規分布 $N(\mu, 20^2)$ に従っている．ゆえに標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_{100}}{100}$$

は平均 μ，分散 $\boxed{\mathbf{67}}$ の正規分布 $N\left(\mu, \boxed{\mathbf{67}}\right)$ に従う．そこで

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\boxed{\mathbf{68}}}$$

とおけば，Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数である．正規分布表によれば

$$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

であることがわかるので

$$P\left(\overline{X} - \boxed{\mathbf{69}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + \boxed{\mathbf{69}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

となる．標本平均 $\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = 120$ なので，求める信頼区間は $\boxed{\mathbf{70}}$ となる．なお，捕まえるカエルの数を 2 倍にすると，信頼区間の幅は $\boxed{\mathbf{71}}$ ．

$\boxed{67}$ ・ $\boxed{68}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 8
⑥ 10	⑦ 20	⑧ 40	⑨ 100	ⓐ 200	ⓑ 400

$\boxed{69}$ の解答群

⓪ 0.49	① 0.98	② 1.96	③ 3.92	④ 4.9	⑤ 7.84
⑥ 9.8	⑦ 15.68	⑧ 19.6	⑨ 39.2	ⓐ 78.4	

$\boxed{\textbf{70}}$ **の解答群**

⓪ $[119.51, 120.49]$　① $[119.02, 120.98]$　② $[118.04, 121.96]$

③ $[116.08, 123.92]$　④ $[115.1, 124.9]$　⑤ $[112.16, 127.84]$

⑥ $[110.2, 129.8]$　⑦ $[104.32, 135.68]$　⑧ $[100.4, 139.6]$

⑨ $[80.8, 159.2]$　ⓐ $[41.6, 198.4]$

$\boxed{\textbf{71}}$ **の解答群**

⓪ 変わらない　① $\sqrt{2}$ 倍になる　② 2 倍になる

③ 4 倍になる　④ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍になる　⑤ $\dfrac{1}{2}$ 倍になる

⑥ $\dfrac{1}{4}$ 倍になる