EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2021年12月18日（土）
4分野受験 午後1時30分 ～ 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 ～ 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時10分

＊受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．

(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．

(8) 問題冊子は持ち帰ること．

(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば， **23** と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば **23** には **23** と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， **23** は（ **23** ）という意味である．したがって，例えば **23** の解答が $-x-1$ の場合，x^2- **23** は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

(6) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$,　$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$,　$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

目次

第１分野　微分積分

〔問１～問５：解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{16}}$〕

問１　次の２つの極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+\cos x)\cos x-3}{2x^2}=\boxed{\mathbf{1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(\sqrt{1+ex^2}-1\right)-\log x\right\}=\boxed{\mathbf{2}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$・$\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ 0	① ∞	② $-\infty$		
③ 1	④ 2	⑤ $\dfrac{1}{2}$	⑥ $\dfrac{1}{3}$	⑦ $\dfrac{2}{3}$
⑧ -1	⑨ -2	ⓐ $-\dfrac{1}{2}$	ⓑ $-\dfrac{1}{3}$	ⓒ $-\dfrac{2}{3}$
ⓓ e	ⓔ e^2	ⓕ $\sqrt{e}$	ⓖ $\dfrac{1}{e}$	ⓗ $\dfrac{1}{e^2}$

計算用紙

問 2 関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\log(1+x^2)-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}x$ を考える．

(1) $f(x)$ の導関数を求めると

$$f'(x)=\boxed{\mathbf{3}}$$

となるので，$f'(x)=0$ の解は $x=\boxed{\mathbf{4}}$ である．

$\boxed{3}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x}{1+x^2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$　　① $\dfrac{x}{1+x^2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

② $\dfrac{1}{1+x^2}\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$　　③ $\dfrac{1}{1+x^2}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

④ $\dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$　　⑤ $\dfrac{1}{1+x^2}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

⑥ $\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{\sqrt{3}(1+x^2)}$　　⑦ $\dfrac{1}{4x}-\dfrac{1}{\sqrt{3}(1+x^2)}$

⑧ $\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}(1-x^2)}$　　⑨ $\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}(1-x^2)}$

ⓐ $\dfrac{x}{2(1+x^2)}+\dfrac{1}{\sqrt{3}(1-x^2)}$　　ⓑ $\dfrac{x}{2(1+x^2)}-\dfrac{1}{\sqrt{3}(1-x^2)}$

$\boxed{4}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② -1	③ $\dfrac{1}{2}$	④ $-\dfrac{1}{2}$
⑤ $\dfrac{1}{3}$	⑥ $-\dfrac{1}{3}$	⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	⑧ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	⑨ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
ⓐ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	ⓑ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	ⓒ $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$	ⓓ $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$	ⓔ $-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

(2) $x=\boxed{\mathbf{4}}$ において，$f(x)$ は $\boxed{\mathbf{5}}$．

$\boxed{5}$ の解答群

⓪ 最大値をとる　① 最小値をとる　② 最小値も最大値もとらない

計算用紙

問 3　定積分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 1}$$

の値を求める．$t = \tan\dfrac{x}{2}$ とおくと

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \frac{dx}{dt} = \boxed{\mathbf{6}}$$

であり，$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき $t = \boxed{\mathbf{7}}$ なので

$$I = \int_0^{\boxed{7}} \frac{dt}{\boxed{\mathbf{8}}} = \boxed{\mathbf{9}}.$$

6 ・ **8** の解答群

⓪ $1+t$	① $1+2t$	② $2(1+t)$	③ $1+t^2$
④ $2(1+t^2)$	⑤ $(1+t)^2$	⑥ $2+t+t^2$	⑦ $\dfrac{2+t+2t^2}{2}$
⑧ $\dfrac{1}{1+t^2}$	⑨ $\dfrac{2}{1+t^2}$	ⓐ $\dfrac{1}{2(1+t)}$	ⓑ $\dfrac{1}{2(1+t^2)}$

7 の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\sqrt{2}$	④ $\sqrt{3}$
⑤ $\dfrac{1}{2}$	⑥ $\dfrac{1}{3}$	⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	⑨ ∞

9 の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{1}{2}$	④ $\dfrac{1}{3}$
⑤ $\dfrac{2}{9}$	⑥ $\dfrac{8}{9}$	⑦ $\dfrac{16}{9}$	⑧ $\log 2$	⑨ $\log 3$
ⓐ $2\log 2$	ⓑ $2\log 3$	ⓒ $\dfrac{1}{2}\log 2$	ⓓ $\dfrac{1}{2}\log 3$	ⓔ ∞

計算用紙

問 4　$t>0$ において，関数 $f(t)$ は微分可能であるとし，正数 x, y に対して $u(x,y)=\dfrac{f(xy)}{x+y}$ とおく．このとき

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\boxed{\textbf{10}}$$

および

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\boxed{\textbf{11}}$$

が成り立つ．特に $f(t)=\sqrt{t}$ のとき

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\boxed{\textbf{12}}$$

が成り立つ．

$\boxed{\textbf{10}}$ ・ $\boxed{\textbf{11}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{f(xy)-xyf'(xy)}{x+y}$　① $\dfrac{xyf'(xy)-f(xy)}{x+y}$

② $\dfrac{f(xy)-2xyf'(xy)}{x+y}$　③ $\dfrac{2xyf'(xy)-f(xy)}{x+y}$

④ $\dfrac{f(xy)(1-2xyf'(xy))}{x+y}$　⑤ $\dfrac{f(xy)(2xyf'(xy)-1)}{x+y}$

⑥ $\dfrac{f(xy)}{(x+y)^2}-\dfrac{f'(xy)}{x+y}$　⑦ $\dfrac{f'(xy)}{x+y}-\dfrac{f(xy)}{(x+y)^2}$

⑧ $\dfrac{f(xy)}{(x+y)^2}-\dfrac{xf'(xy)}{x+y}$　⑨ $\dfrac{xf'(xy)}{x+y}-\dfrac{f(xy)}{(x+y)^2}$

ⓐ $\dfrac{f(xy)}{(x+y)^2}-\dfrac{yf'(xy)}{x+y}$　ⓑ $\dfrac{yf'(xy)}{x+y}-\dfrac{f(xy)}{(x+y)^2}$

$\boxed{\textbf{12}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ u　④ $2u$

⑤ $\dfrac{u}{2}$　⑥ $-u$　⑦ $-2u$　⑧ $-\dfrac{u}{2}$

⑨ $(1-xy)u$　ⓐ $(1-2xy)u$　ⓑ $(xy-1)u$　ⓒ $(2xy-1)u$

計算用紙

問 5 xy 平面上の集合 D が

$$D = \{\,(x,\,y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x + y \leqq 1\,\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D \frac{y+1}{x+y+1}\,dxdy$$

の値を求める．

(1) I は

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\boxed{\mathbf{13}}} \frac{y+1}{x+y+1}\,dx \right) dy$$

と表される．

(2) $I_1(y) = \int_0^{\boxed{\mathbf{13}}} \frac{1}{x+y+1}\,dx$ とおく．変数変換 $z = x+y+1$ を行うと

$$I_1(y) = \int_{y+1}^{\boxed{\mathbf{14}}} \frac{1}{z}\,dz \;=\; \Big[\log z\Big]_{y+1}^{\boxed{\mathbf{14}}} \;=\; \log\ \boxed{\mathbf{14}}\ - \log(y+1)$$

となる．

$\boxed{\mathbf{13}}$ ・ $\boxed{\mathbf{14}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2
③ x	④ $x+1$	⑤ $1-x$
⑥ y	⑦ $y+1$	⑧ $1-y$
⑨ $x+y$	ⓐ $x+y+1$	ⓑ $1-x-y$

(3) 部分積分法を用いると

$$\int_0^1 (y+1)\log(y+1)\,dy = \boxed{\mathbf{15}}$$

であるから

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (y+1) I_1(y)\,dy \\ &= \int_0^1 (y+1)[\log \boxed{\mathbf{14}} - \log(y+1)]\,dy = \boxed{\mathbf{16}} \end{aligned}$$

を得る.

15 ・ **16** の解答群

⓪ 0	① $\dfrac{1}{4}$	② $\dfrac{14}{3}$
③ $2\log 2 + 1$	④ $2\log 2 - 1$	⑤ $2\log 2 - \dfrac{3}{4}$
⑥ $3\log 2 + 4$	⑦ $3\log 2 - \dfrac{2}{3}$	⑧ $\dfrac{3\log 2}{2} + \dfrac{1}{4}$
⑨ $\dfrac{7\log 2}{2} - \dfrac{3}{4}$	ⓐ $\dfrac{2\log 2}{3} - \dfrac{16}{9}$	ⓑ $-\log 2 + 3$
ⓒ $-5\log 2 + \dfrac{19}{3}$	ⓓ $-\dfrac{\log 2}{2} + \dfrac{3}{4}$	ⓔ $-\dfrac{\log 2}{3} + \dfrac{1}{9}$

第2分野　線形代数

〔問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{17}}$ ～ $\boxed{\mathbf{35}}$ 〕

問 1　行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

とする.

(1)　A の行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\mathbf{17}}$ であるので，A は逆行列 A^{-1} をもつ.

(2)　逆行列 A^{-1} の $(2,3)$ 成分は $\boxed{\mathbf{18}}$ であり，A^{-1} の行列式の値は $\boxed{\mathbf{19}}$ である.

$\boxed{\mathbf{17}}$ ～ $\boxed{\mathbf{19}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② -1　③ 3　④ -3　⑤ 5　⑥ -5

⑦ $\dfrac{1}{3}$　⑧ $-\dfrac{1}{3}$　⑨ $\dfrac{1}{5}$　ⓐ $-\dfrac{1}{5}$　ⓑ $\dfrac{1}{7}$　ⓒ $-\dfrac{1}{7}$

計算用紙

問 2　座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(2, a, 1)$, $\mathrm{B}(1, -1, 1)$, $\mathrm{C}(3, -1, 2)$ がある．ただし，a は定数とする．

(1)　$a =$ $\boxed{\textbf{20}}$ のとき，ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \boxed{\textbf{21}} \end{pmatrix}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のどちらにも直交する．

(2)　$a =$ $\boxed{\textbf{20}}$ のとき，3 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を含む平面上の任意の点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ は $\boxed{\textbf{22}}$ を満たす．

$\boxed{\textbf{20}}$ ・ $\boxed{\textbf{21}}$ の解答群

⓪ 0

① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6
⑦ -1	⑧ -2	⑨ -3	ⓐ -4	ⓑ -5	ⓒ -6

$\boxed{\textbf{22}}$ の解答群

⓪ $x + 2y = 0$	① $2x + y = 1$
② $x + 2y - z = 0$	③ $2x + y - 2z = 3$
④ $x + 2y - z = 2$	⑤ $2x + y - 2z = -1$
⑥ $x + 2y - 3z = 4$	⑦ $2x + y - 4z = 0$
⑧ $x + 2y - 3z = -2$	⑨ $2x + y - 4z = -3$

計算用紙

問 3　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ における 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

について考える．ただし，s は定数とする．

(1)　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属になるのは $s =$ **23** のときである．

(2)　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を並べてできる正方行列を $A = (\boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2\, \boldsymbol{a}_3)$ と表し，集合 V を

$$V = \left\{ A\boldsymbol{x} \;\middle|\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

とおく．$s =$ **23** のとき，V は **24** 次元ベクトル空間であり，$s \neq$ **23** のとき，V は **25** 次元ベクトル空間である．

23 〜 **25** の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ −1　⑦ −2　⑧ −3　⑨ −4　ⓐ −5

計算用紙

問 4　4 元連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 = 1 \end{cases}$$

を考える．方程式 $(*)$ の拡大係数行列を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき，行列 A の階数（ランク）は $\boxed{\textbf{26}}$ であり，方程式 $(*)$ の解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ \boxed{\textbf{27}} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ \boxed{\textbf{28}} \\ \boxed{\textbf{29}} \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (\ t\ は任意定数)$$

と表すことができる．

$\boxed{\textbf{26}}$ 〜 $\boxed{\textbf{29}}$ **の解答群**

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

計算用紙

問 5　2 次方程式

$$(*)\qquad x^2+6\sqrt{3}xy-5y^2=8$$

について考える．

(1)　方程式 $(*)$ は，対称行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & \boxed{\mathbf{30}} \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 8$$

と表すことができる．

(2)　(1) で定めた行列 A の固有値は $\lambda_1=4$, $\lambda_2=\boxed{\mathbf{31}}$ である．

λ_1 に対応する固有ベクトルとして　$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \boxed{\mathbf{32}} \end{pmatrix}$,

λ_2 に対応する固有ベクトルとして　$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{33}} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

がとれる．

(3)　ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$|\boldsymbol{x}|$ はその長さ（大きさ）を表すものとする．(2) で求めたベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ を用いて，正方行列 $P=\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{p}_1}{|\boldsymbol{p}_1|} & \dfrac{\boldsymbol{p}_2}{|\boldsymbol{p}_2|} \end{pmatrix}$ を定める．すると P は $\boxed{\mathbf{34}}$ であり，変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

により，方程式 $(*)$ は $\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2=8$ となる．この方程式が表す図形は $\boxed{\mathbf{35}}$ である．

$\boxed{\mathbf{30}}$ ～ $\boxed{\mathbf{33}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8

⑨ -1　ⓐ -2　ⓑ -3　ⓒ -4　ⓓ -5　ⓔ -6　ⓕ -7　ⓖ -8

$\boxed{34}$ の解答群

⓪ 単位行列　① 対角行列　② 対称行列

③ 交代行列　④ 直交行列　⑤ 上三角行列

$\boxed{35}$ の解答群

⓪ 直線　① 楕円　② 放物線　③ 双曲線

第3分野　常微分方程式

〔問1〜問5：解答番号 $\boxed{36}$ 〜 $\boxed{52}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．すべての微分方程式は関数が定義される範囲で考える．また，特殊解は特解ともいう．

問1 微分方程式

$$(*) \qquad 2x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$$

について考える．

(1) $y = x \cdot u(x)$ を $(*)$ に代入すると，$u(x)$ に関する微分方程式

$$(**) \qquad u' = \boxed{36}$$

が導かれる．

$\boxed{36}$ の解答群

⓪ $\dfrac{2-u}{2u}$	① $-\dfrac{2-u}{2u}$	② $\dfrac{2+u^2}{xu}$	③ $-\dfrac{2+u^2}{xu}$
④ $\dfrac{2+u^2}{2xu}$	⑤ $-\dfrac{2+u^2}{2xu}$	⑥ $\dfrac{2-u^2}{2xu}$	⑦ $-\dfrac{2-u^2}{2xu}$

(2) $(**)$ の一般解は

$$(***) \qquad \boxed{37} = C \quad (C \text{ は } 0 \text{ でない任意定数})$$

と表される．

$\boxed{37}$ の解答群

⓪ $2u + x$	① $x(2+u^2)$	② $\dfrac{2+u^2}{x}$	③ $\dfrac{2+u^2}{e^x}$
④ $2u - x$	⑤ $x(2-u^2)$	⑥ $\dfrac{2-u^2}{x}$	⑦ $\dfrac{2-u^2}{e^x}$

(3) $(***)$ に $u = \dfrac{y}{x}$ を代入すれば，$(*)$ の一般解が導かれる．これは，xy 平面上の $\boxed{\mathbf{38}}$ を表す．特に，$\boxed{\mathbf{38}}$ が点 $(-1, 1)$ を通るとき $C = \boxed{\mathbf{39}}$ である．

$\boxed{\mathbf{38}}$ の解答群

⓪ 直線　① 円　② 楕円　③ 双曲線
④ 放物線　⑤ サイクロイド　⑥ 懸垂線

$\boxed{\mathbf{39}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5
⑥ -1　⑦ -2　⑧ -3　⑨ -4　ⓐ -5

問 2　微分方程式

$$(*) \qquad y' + y\tan x = \frac{1}{\cos x}$$

について考える．

(1)　対応する同次方程式

$$y' + y\tan x = 0$$

の一般解は, C を任意定数とすると

$$(**) \qquad y = C\,\boxed{\mathbf{40}}$$

と表される．

(2)　$(**)$ において，C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて，$y = u(x) \cdot \boxed{\mathbf{40}}$ を $(*)$ に代入すると

$$u' = \boxed{\mathbf{41}}$$

が得られる．この方程式の一般解を求めると

$$u(x) = \boxed{\mathbf{42}}$$

であるので，$(*)$ の一般解は $y = \boxed{\mathbf{42}} \cdot \boxed{\mathbf{40}}$ である．

$\boxed{40}$ ・ $\boxed{41}$ の解答群

⓪ x	① $\sin x$	② $\cos x$	③ $\tan x$
	④ $\sin^2 x$	⑤ $\cos^2 x$	⑥ $\tan^2 x$
⑦ $\dfrac{1}{x}$	⑧ $\dfrac{1}{\sin x}$	⑨ $\dfrac{1}{\cos x}$	ⓐ $\dfrac{1}{\tan x}$
	ⓑ $\dfrac{1}{\sin^2 x}$	ⓒ $\dfrac{1}{\cos^2 x}$	ⓓ $\dfrac{1}{\tan^2 x}$

$\boxed{\mathbf{42}}$ の解答群

⓪ $\sin x + \tilde{C}$	① $\cos x + \tilde{C}$	② $\tan x + \tilde{C}$
③ $-\sin x\ + \tilde{C}$	④ $-\cos x + \tilde{C}$	⑤ $-\tan x + \tilde{C}$
⑥ $\dfrac{1}{\sin x} + \tilde{C}$	⑦ $\dfrac{1}{\cos x} + \tilde{C}$	⑧ $\dfrac{1}{\tan x} + \tilde{C}$
⑨ $-\dfrac{1}{\sin x} + \tilde{C}$	ⓐ $-\dfrac{1}{\cos x} + \tilde{C}$	ⓑ $-\dfrac{1}{\tan x} + \tilde{C}$

($\tilde{C}$ は任意定数)

(3) 初期条件 $y(0) = 2$ を満たす方程式 $(*)$ の解は $y = \boxed{\mathbf{43}}$ である.

$\boxed{\mathbf{43}}$ の解答群

⓪ $\sin x$	① $\cos x$	② $\tan x$
③ $\cos x + \sin x$	④ $2\cos x + \sin x$	⑤ $\cos x + 2\sin x$
⑥ $\cos x - \sin x$	⑦ $2\cos x - \sin x$	⑧ $\cos x - 2\sin x$
⑨ $-\cos x + \sin x$	ⓐ $-2\cos x + \sin x$	ⓑ $-\cos x + 2\sin x$

問 3　微分方程式

$$(*) \qquad y'' - (y')^2 = 1$$

について考える．

(1)　$z = y'$ とおくと，$(*)$ は z に関する微分方程式

$$\frac{dz}{dx} - z^2 = 1$$

となる．これを解いて

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx$$

より

$$\boxed{\mathbf{44}} = x + C_1 \qquad (C_1 \text{ は任意定数})$$

を得る．

$\boxed{44}$ の解答群

⓪ $\dfrac{2z}{(z^2+1)^2}$	① $\dfrac{-2z}{(z^2+1)^2}$	② $\log(z^2+1)$
③ $\sin z$	④ $\cos z$	⑤ $\tan z$
⑥ $\dfrac{1}{\sin z}$	⑦ $\dfrac{1}{\cos z}$	⑧ $\dfrac{1}{\tan z}$
⑨ $\sin^{-1} z$	ⓐ $\cos^{-1} z$	ⓑ $\tan^{-1} z$

(2)　さらに

$$y' = z = \boxed{\mathbf{45}}$$

であることから $(*)$ の一般解は

$$y = \int \boxed{\mathbf{45}}\, dx = \boxed{\mathbf{46}} + C_2 \qquad (C_2 \text{ は任意定数})$$

である．

$\boxed{45}$ ・ $\boxed{46}$ の解答群

⓪ $\sin(x+C_1)$	① $\cos(x+C_1)$	② $\tan(x+C_1)$
③ $-\sin(x+C_1)$	④ $-\cos(x+C_1)$	⑤ $-\tan(x+C_1)$
⑥ $\sin^{-1}(x+C_1)$	⑦ $\cos^{-1}(x+C_1)$	⑧ $\tan^{-1}(x+C_1)$
⑨ $\log\lvert\cos(x+C_1)\rvert$	ⓐ $-\log\lvert\cos(x+C_1)\rvert$	

問 4 微分方程式

$$(*) \qquad 2y'' + y' - y = 3e^{-x}$$

について考える．

(1) 対応する同次方程式

$$2y'' + y' - y = 0$$

の一般解を y_h とすれば，$y_h = \boxed{\textbf{47}}$ である．

$\boxed{\textbf{47}}$ の解答群

⓪ $C_1e^{x} + C_2e^{-x}$　① $C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2e^{-x}$　② $C_1e^{\frac{1}{2}x} + C_2e^{-x}$

③ $C_1e^{-\frac{1}{2}x} + C_2e^{x}$　④ $C_1e^{\frac{1}{2}x} + C_2e^{x}$　⑤ $C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$

⑥ $C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$　⑦ $C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$　⑧ $C_1e^{x} + C_2e^{2x}$

(C_1, C_2 は任意定数)

(2) 一方，$y_p = \boxed{\textbf{48}} \cdot e^{-x}$ は $(*)$ の特殊解の 1 つであるので，$(*)$ の一般解は $y = y_h + y_p = \boxed{\textbf{47}} + \boxed{\textbf{48}} \cdot e^{-x}$ である．

$\boxed{\textbf{48}}$ の解答群

⓪ 1　① -1　② 3　③ -3　④ x　⑤ $-x$

⑥ $3x$　⑦ $-3x$　⑧ x^2　⑨ $-x^2$　ⓐ $3x^2$　ⓑ $-3x^2$

(3) 初期条件 $y(0) = 0$，$y'(0) = 0$ を満たす方程式 $(*)$ の解 $y(x)$ は $x \to \infty$ のとき $\boxed{\textbf{49}}$．

$\boxed{\textbf{49}}$ の解答群

⓪ 0 に収束する　① 1 に収束する

② $+\infty$ に発散する　③ $-\infty$ に発散する

④ 振動する

計算用紙

問 5 k を正の定数とする．微分方程式

$$(*) \qquad y'' + k^2 y = 0$$

について考える．

(1) 微分方程式 $(*)$ の一般解

$$y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \qquad (C_1,\, C_2 \text{ は任意定数})$$

は $(f_1(x), f_2(x)) = \left(\boxed{\textbf{50}}\right)$ で与えられる．このとき $f_1(x), f_2(x)$ のロンスキー行列式を計算すると

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \boxed{\textbf{51}}$$

である．

$\boxed{\textbf{50}}$ **の解答群**

⓪ $1,\ x$　① $x,\ x^2$

② $e^{kx},\ e^{-kx}$　③ $e^{\sqrt{k}x},\ e^{-\sqrt{k}x}$　④ $e^{k^2x},\ e^{-k^2x}$

⑤ $\cos kx,\ \sin kx$　⑥ $\cos\sqrt{k}x,\ \sin\sqrt{k}x$　⑦ $\cos k^2x,\ \cos k^2x$

$\boxed{\textbf{51}}$ **の解答群**

⓪ 0　① x　② x^2　③ $k\cos^2 x$　④ $k\sin^2 x$　⑤ ke^{kx}

⑥ k　⑦ $\sqrt{k}$　⑧ k^2　⑨ $-2k$　ⓐ $-2\sqrt{k}$　ⓑ $-2k^2$

(2) ℓ を正の定数とする．微分方程式 $(*)$ が，$y(0)=0$, $y(\ell)=0$ を満たし，定数関数ではない解をもつための必要十分条件は，$k\ell = \boxed{\textbf{52}}$ である．

$\boxed{\textbf{52}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3

④ $\dfrac{e}{n}$　⑤ e　⑥ ne　⑦ n^2e

⑧ $\dfrac{\pi}{n}$　⑨ $\dfrac{n\pi}{2}$　ⓐ $n\pi$　ⓑ $2n\pi$

(n は自然数)

計算用紙

第4分野　確率・統計

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{53}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{72}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1 (1) 確率変数 X, Y の確率分布がそれぞれ

X の値	1	2	3
確率	$\frac{1}{10}$	a	b

Y の値	4	5	6
確率	$\frac{2}{5}$	a	c

(a, b, c は定数)

で与えられていて，$E(Y) = 5$ が成り立つとする．このとき $c = \boxed{\mathbf{53}}$ であり，

$$E\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \boxed{\mathbf{54}}, \qquad V(Y) = \boxed{\mathbf{55}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{53}}$ **の解答群**

⓪ 0　① $\frac{1}{10}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{3}{10}$　④ $\frac{2}{5}$　⑤ $\frac{1}{2}$

⑥ $\frac{3}{5}$　⑦ $\frac{7}{10}$　⑧ $\frac{9}{10}$　⑨ 1

$\boxed{\mathbf{54}}$ ・ $\boxed{\mathbf{55}}$ **の解答群**

⓪ 0　① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{4}{5}$　⑤ 1

⑥ 2　⑦ $\frac{11}{5}$　⑧ $\frac{13}{5}$　⑨ 3　ⓐ $\frac{17}{5}$　ⓑ $\frac{19}{5}$

ⓒ $\frac{7}{2}$　ⓓ $\frac{39}{10}$　ⓔ $\frac{14}{25}$　ⓕ $\frac{41}{100}$

(2) 確率変数 X がパラメータ λ をもつポアソン分布に従っている，すなわち

$$P\left(X=n\right)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!},\qquad n=0,1,2,\ldots$$

とする．また，$E(X)=3$ であるとする．このとき $\lambda=$ **56** であり，

$$P(X \geqq 1)=\boxed{\textbf{57}}$$

となる．

56 の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ $\frac{1}{2}$　⑦ $\frac{1}{3}$　⑧ $\frac{1}{4}$　⑨ $\frac{1}{5}$　ⓐ $\frac{1}{6}$

57 の解答群

⓪ 0

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{1}{4}$　⑥ $\frac{3}{4}$

⑦ e　⑧ e^2　⑨ e^3　ⓐ e^{-1}　ⓑ e^{-2}　ⓒ e^{-3}

ⓓ $1-e^{-1}$　ⓔ $1-e^{-2}$　ⓕ $1-e^{-3}$

問 2 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が, 正の定数 a を用いて

$$f(x) = \begin{cases} a\,|\sin x \cos x|, & |x| \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

で与えられている．このとき $a =$ $\boxed{\textbf{58}}$ であり，$P\left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq X \leqq \dfrac{\pi}{4}\right) =$ $\boxed{\textbf{59}}$ である．また X の分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とすると，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 0$ においては $F(x) =$ $\boxed{\textbf{60}}$ $\cdot \cos^2 x$ である．

$\boxed{\textbf{58}}$ 〜 $\boxed{\textbf{60}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ $\dfrac{1}{2}$	④ $\dfrac{1}{4}$	
⑤ $\dfrac{3}{4}$	⑥ $\dfrac{1}{8}$	⑦ $\dfrac{3}{8}$	⑧ $\dfrac{5}{8}$	⑨ $\dfrac{7}{8}$	
ⓐ π	ⓑ $\dfrac{\pi}{2}$	ⓒ $\dfrac{\pi}{4}$	ⓓ $\dfrac{3\pi}{4}$	ⓔ $-\sin x$	ⓕ $\dfrac{\sin^2 x}{2}$

計算用紙

問 3 (1) 2 つの事象 A, B に対し，事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A|B)$ で表す．

$$P(A) = \frac{1}{2}P(B), \qquad P(A|B) = \frac{1}{6}$$

のとき，$P(B|A) = \boxed{\textbf{61}}$ である．さらに事象 A, B が独立であるとき，
$P(A) = \boxed{\textbf{62}}$, $P(A \cup B) = \boxed{\textbf{63}}$ である．

$\boxed{61}$ ～ $\boxed{63}$ の解答群

⓪ 0 ① 1

② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{6}$ ⑥ $\frac{4}{9}$ ⑦ $\frac{5}{9}$ ⑧ $\frac{1}{12}$ ⑨ $\frac{1}{18}$

(2) m, σ, p を定数とし $\sigma > 0$, $0 < p < 1$ とする．確率変数 X は $E(X) = m$, $V(X) = \sigma^2$ を満たし，確率変数 Y のとりうる値は 0 と 1 のみで $P(Y = 1) = p$ であるとする．X と Y が独立のとき，積 XY の期待値と分散を求める．まず X と Y は独立なので $E(XY) = \boxed{\textbf{64}}$ である．また Y のとりうる値が 0 と 1 なので $Y^2 = \boxed{\textbf{65}}$ である．したがって

$$E((XY)^2) = E(X^2)E(Y^2) = \boxed{\textbf{66}}$$

が成り立つので $V(XY) = \boxed{\textbf{67}}$ である．

$\boxed{64}$ の解答群

⓪ 0 ① 1 ② p ③ $1-p$ ④ $m+p$ ⑤ $m-p$

⑥ mp ⑦ $m(1-p)$ ⑧ $mp(1-p)$

$\boxed{65}$ の解答群

⓪ 0 ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ Y ④ $-Y$ ⑤ $2Y$ ⑥ pY

$\boxed{\mathbf{66}}$ ・ $\boxed{\mathbf{67}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $p\sigma + m$　③ $\sigma^2 + m^2$
④ $p(\sigma^2 + m^2)$　⑤ $p\sigma^2 + p(1-p)m^2$　⑥ $mp(1-p)$　⑦ $p^2\sigma^2$

問 4 ある温度計の測定誤差 (測定値から真値を引いた値) は，製造時の記録によると，0°C から 20°C の範囲では，平均 0°C, 標準偏差 0.3°C の正規分布に従うものであった．ところが数年経ったいま，正確に 10°C と分かっている液体を測定する操作を，測定値が独立になる条件で 9 回実施したところ，測定誤差の標本平均は 0.2°C であった．この温度計の機構上，現在でも測定誤差は標準偏差 0.3°C の正規分布に従っていると考えられるが，測定誤差の平均は経年変化により上昇した可能性がある．そこで，現在の測定誤差の平均を μ°C, 標準偏差を 0.3°C として，μ に対する

帰無仮説 $H_0 : \mu = 0$

対立仮説 $H_1 : \mu > 0$

の片側検定を有意水準 5% で行うことにした．
n 回目の測定誤差を確率変数 X_n で表すと，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_9}{9}$$

は平均 $\boxed{\mathbf{68}}$，標準偏差 $\boxed{\mathbf{69}}$ の正規分布に従う．よって帰無仮説 H_0 のもとでは，

$$Z = \frac{\overline{X} - \boxed{\mathbf{70}}}{\boxed{\mathbf{69}}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数である．正規分布表によれば

$$P(Z \geqq 1.645) \fallingdotseq 0.05$$

である．一方，標本平均 $\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = 0.2$ なので，Z の実現値は $z = \boxed{\mathbf{71}}$ であり，H_0 は有意水準 5% で $\boxed{\mathbf{72}}$．

$\boxed{68}$ の解答群

⓪ $\dfrac{\mu}{81}$　① $\dfrac{\mu}{9}$　② $\dfrac{\mu}{3}$　③ μ　④ 3μ　⑤ 9μ　⑥ 81μ

$\boxed{69}$ ～ $\boxed{71}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 9　④ 10
⑤ 0.1　⑥ 0.2　⑦ 0.3　⑧ 0.9　⑨ 2.7　ⓐ 8.1　ⓑ 10.2
ⓒ $\dfrac{1}{270}$　ⓓ $\dfrac{1}{90}$　ⓔ $\dfrac{1}{30}$

$\boxed{72}$ **の解答群**

⓪ 棄却される　　① 採択される