EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2019年12月14日（土）

4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分

3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分

2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分

1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) 机の右上に学生証を提示すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(4) マークには **HB** または **B** の鉛筆 (またはシャープペンシル) を使用すること．

(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．

(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(7) 試験開始40分後から退室を認める．

(8) 問題冊子は持ち帰ること．

(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば， $\boxed{\textbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ には $\boxed{\textbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， $\boxed{\textbf{23}}$ は $\left(\boxed{\textbf{23}}\right)$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2-\boxed{\textbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

目次

第1分野　微分積分

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{17}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x, \cos x, \tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$,　$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$,　$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問 1　次の 2 つの極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} = \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2x+1} = \boxed{\mathbf{2}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ -1	④ -2
⑤ $\dfrac{1}{2}$	⑥ $-\dfrac{1}{2}$	⑦ e	⑧ $e+1$	⑨ e^2+1
ⓐ e^2	ⓑ e^{-2}	ⓒ $2e$	ⓓ ∞	ⓔ $-\infty$

計算用紙

問 2　関数 $\sin x$ および e^{x^2} のマクローリン展開（$x=0$ を中心とするテイラー展開）はそれぞれ

$$\sin x = \boxed{\mathbf{3}},$$

$$e^{x^2} = 1 + \boxed{\mathbf{4}}\,x + x^2 + \boxed{\mathbf{5}}\,x^3 + \frac{x^4}{2} + \cdots$$

である．したがって

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^3 \sin x} = \boxed{\mathbf{6}}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ の解答群

⓪ $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$　　① $1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

② $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$　　③ $-x + \dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} - \cdots$

④ $\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \dfrac{x^8}{8!} + \cdots$　　⑤ $x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{6}}$ の解答群

⓪ 0　　① 1　　② $\dfrac{1}{2}$　　③ $\dfrac{1}{3}$　　④ $\dfrac{1}{6}$

⑤ ∞　　⑥ -1　　⑦ $-\dfrac{1}{2}$　　⑧ $-\dfrac{1}{3}$　　⑨ $-\dfrac{1}{6}$

計算用紙

問 3　(1)　定積分 $I_1 = \int_0^1 \cos^{-1} x\, dx$ を変数変換を用いて求める．$t = \cos^{-1} x$ とおくと，$x = \cos t$ なので

$$I_1 = \int_0^{\boxed{7}} t \sin t\, dt$$

と表される．これを計算すると $I_1 = \boxed{\ 8\ }$ が得られる．

(2)　定積分 $I_2 = \int_0^1 (\cos^{-1} x)^2\, dx$ についても，(1) と同じ変数変換をすると

$$I_2 = \int_0^{\boxed{7}} \boxed{\ 9\ }\, dt$$

となるので，これを計算すると $I_2 = \boxed{\ 10\ }$ を得る．

$\boxed{\ 7\ }$ ・ $\boxed{\ 8\ }$ ・ $\boxed{\ 10\ }$ の解答群

⓪ 0	① 1	② π	③ $\pi - 1$	④ $\pi - 2$
⑤ $\dfrac{\pi}{2}$	⑥ $\dfrac{\pi^2}{4} - 1$	⑦ 2π	⑧ $1 - \pi$	⑨ $2 - \pi$
ⓐ $\dfrac{\pi}{4}$	ⓑ $\dfrac{\pi^2}{4} - 2$	ⓒ $\dfrac{\pi^2}{4}$	ⓓ $\dfrac{\pi^3}{24}$	ⓔ $\dfrac{\pi}{2} - 1$

$\boxed{\ 9\ }$ の解答群

⓪ t^2	① $\sin^2 t$	② $t^2 \sin t$	③ $t \sin^2 t$	④ $t^2 \sin^2 t$
⑤ $t \cos t$	⑥ $\cos^2 t$	⑦ $t^2 \cos t$	⑧ $t \cos^2 t$	⑨ $t^2 \cos^2 t$

計算用紙

問 4 関数 $u(x,y)=a\log(1+x^2+y^2)$ を考える．ただし a は 0 でない定数とする．このとき

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\boxed{\mathbf{11}},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\boxed{\mathbf{12}}$$

である．同様に，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算すると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\boxed{\mathbf{13}}$$

となる．したがって，$a=\boxed{\mathbf{14}}$ とすると，u は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-8e^u$$

を満たす．

$\boxed{\mathbf{11}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{a}{1+x^2+y^2}$　① $\dfrac{ax}{1+x^2+y^2}$　② $\dfrac{2ax}{1+x^2+y^2}$

③ $-\dfrac{a}{1+x^2+y^2}$　④ $-\dfrac{ax}{1+x^2+y^2}$　⑤ $-\dfrac{2ax}{1+x^2+y^2}$

$\boxed{\mathbf{12}}$ ・ $\boxed{\mathbf{13}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{a}{(1+x^2+y^2)^2}$　① $\dfrac{2ax}{(1+x^2+y^2)^2}$　② $-\dfrac{2ax}{(1+x^2+y^2)^2}$

③ $\dfrac{a(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$　④ $\dfrac{2a(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$　⑤ $\dfrac{2a(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$

⑥ $\dfrac{2a}{(1+x^2+y^2)^2}$　⑦ $-\dfrac{2a}{(1+x^2+y^2)^2}$　⑧ $\dfrac{8a}{(1+x^2+y^2)^2}$

⑨ $\dfrac{4a}{(1+x^2+y^2)^2}$　ⓐ $-\dfrac{4a}{(1+x^2+y^2)^2}$　ⓑ $-\dfrac{8a}{(1+x^2+y^2)^2}$

$\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}$　① 1　② 2　③ 4　④ 8

⑤ $-\dfrac{1}{2}$　⑥ -1　⑦ -2　⑧ -4　⑨ -8

計算用紙

問 5　xy 平面内の集合 D が

$$D = \{\, (x,\, y) \mid x \geqq y \geqq 0,\ x + y \leqq 1 \,\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D e^{(x+y)^3}(x-y)\,dxdy$$

の値を求める．変数変換 $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$ を行うと，集合 D は (u, v) の集合

$$\left\{ (u,\, v) \;\middle|\; 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq \boxed{\textbf{15}} \right\}$$

に対応する．この変換のヤコビ行列式（ヤコビアン）は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \boxed{\textbf{16}}$$

である．これらを用いると $I = \boxed{\textbf{17}}$ を得る．

$\boxed{\textbf{15}}$ ・ $\boxed{\textbf{16}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}$	① 1	② 2	③ u	④ $u+v$	⑤ $\dfrac{uv}{2}$
⑥ $-\dfrac{1}{2}$	⑦ -1	⑧ -2	⑨ u^2	ⓐ u^2+v^2	ⓑ uv

$\boxed{\textbf{17}}$ の解答群

⓪ $e-1$	① $\dfrac{e-1}{2}$	② $\dfrac{e-1}{4}$	③ $\dfrac{e}{4}$	④ $\dfrac{e-1}{12}$
⑤ $1-e$	⑥ $\dfrac{1-e}{2}$	⑦ $\dfrac{1-e}{4}$	⑧ $\dfrac{e}{12}$	⑨ $\dfrac{1-e}{12}$

計算用紙

第2分野　線形代数

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{18}}$ 〜 $\boxed{\textbf{35}}$ 〕

(注意) 行列 A に対し，$\mathrm{rank}\,A$ は A の階数（ランク）を表す．また，1 次独立，1 次従属はそれぞれ線形独立，線形従属ともいう．

問 1 (1) 行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．$a=$ $\boxed{\textbf{18}}$ のとき A の逆行列は存在しない．また $a=1$ のとき行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\textbf{19}}$ である．

$\boxed{\textbf{18}}$ ・ $\boxed{\textbf{19}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -3　⑨ -4　ⓐ -5

(2) 行列 B を

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

とするとき，逆行列 B^{-1} の $(1, 1)$ 成分は $\boxed{\textbf{20}}$ であり，$(2, 3)$ 成分は $\boxed{\textbf{21}}$ である．

$\boxed{\textbf{20}}$ ・ $\boxed{\textbf{21}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{4}$

⑤ -1　⑥ $-\dfrac{1}{2}$　⑦ $-\dfrac{1}{3}$　⑧ $-\dfrac{1}{4}$

(3)　座標平面において，点 P(x, y) を点 Q(u, v) にうつす線形変換 (1 次変換) f を

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (a,\ b \text{ は定数})$$

により定める．f により，直線 $y = 2x + 1$ 上のすべての点が直線 $y = x + 1$ 上にうつるのは，$a =$ $\boxed{\textbf{22}}$, $b =$ $\boxed{\textbf{23}}$ のときである．

$\boxed{\textbf{22}}$ ・ $\boxed{\textbf{23}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
	⑤ −1	⑥ −2	⑦ −3	⑧ −4

問 2　ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底とする．このとき

$$\boldsymbol{a} = s\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + t\boldsymbol{w},$$
$$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{u} - 4\boldsymbol{v},$$
$$\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$$

とおく．ただし，s, t は定数とする．

(1)　内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$,　$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 0$ とすると，ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ はいずれも大きさが 1 で互いに直交していることから，$s =$ **24** , $t =$ **25** である．

24 ・ **25** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

(2)　$\mathbb{R}^3$ 空間の原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{c}$ となる点を B, C とする．このとき，三角形 $\triangle$OBC の面積は **26** である．

26 の解答群

⓪ 3	① $\sqrt{11}$	② $\sqrt{13}$	③ $\sqrt{14}$	④ 4	⑤ $\sqrt{17}$
⑥ $\sqrt{19}$	⑦ $\sqrt{21}$	⑧ $\sqrt{23}$			

(3)　$s = 1$ とすると，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立になるのは $t \neq$ **27** のときである．

27 の解答群

⓪ 0	① 1	② $\frac{1}{2}$	③ $\frac{1}{3}$	④ $\frac{2}{3}$	⑤ $\frac{1}{4}$
⑥ $\frac{3}{4}$	⑦ $-\frac{1}{2}$	⑧ $-\frac{1}{3}$	⑨ $-\frac{2}{3}$	ⓐ $-\frac{1}{4}$	ⓑ $-\frac{3}{4}$

計算用紙

問 3　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ の対角化について考える．

(1)　A の固有値を λ_1, λ_2 （$\lambda_1 < \lambda_2$）とすると，$(\lambda_1, \lambda_2) =$ $\boxed{\textbf{28}}$ である．また，λ_1 に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{\textbf{29}} \end{pmatrix}$，$\lambda_2$ に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\textbf{30}} \end{pmatrix}$ がとれる．

(2)　(1) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ を第 1 列，$\boldsymbol{v}$ を第 2 列にもつ行列を

$$P = (\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \boxed{\textbf{29}} & \boxed{\textbf{30}} \end{pmatrix}$$

とすると，$P^{-1}AP$ は対角行列となり，その (2, 2) 成分は $\boxed{\textbf{31}}$ となる．

$\boxed{\textbf{28}}$ の解答群

⓪ (0, 1)	① (1, 2)	② (1, 3)	③ (2, 3)
④ (−1, 1)	⑤ (−1, 2)	⑥ (−1, 3)	⑦ (−2, 3)

$\boxed{\textbf{29}}$ ～ $\boxed{\textbf{31}}$ の解答群

⓪ 0				
① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ −1	⑦ −2	⑧ −3	⑨ −4	ⓐ −5

計算用紙

問 4　連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x + 2y + 4z = a \\ x - 2y + bz = -2 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

について考える．ただし，a, b は定数とする．

(1)　方程式 $(*)$ の係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の階数が 3 になるのは $b \neq$ $\boxed{\textbf{32}}$ のときである．このとき，方程式 $(*)$ は $\boxed{\textbf{33}}$．

(2)　方程式 $(*)$ の拡大係数行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & -2 & b & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるのは $(a, b) =$ $\boxed{\textbf{34}}$ のときである．このとき，方程式 $(*)$ は $\boxed{\textbf{35}}$．

$\boxed{\textbf{32}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ -1　⑥ -2　⑦ -3　⑧ -4

$\boxed{\textbf{33}}$・$\boxed{\textbf{35}}$ の解答群

⓪ 解をもたない　① ただ 1 組の解をもつ

② 無数の解をもつ

$\boxed{\textbf{34}}$ の解答群

⓪ $(0, 0)$　① $(1, 0)$　② $(2, 0)$　③ $(3, 0)$　④ $(0, 1)$

⑤ $(1, 1)$　⑥ $(2, 1)$　⑦ $(3, 1)$　⑧ $(0, 2)$　⑨ $(1, 2)$

ⓐ $(2, 2)$　ⓑ $(3, 2)$

計算用紙

第3分野　常微分方程式

〔 問 1 ～ 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{36}}$ ～ $\boxed{\mathbf{54}}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．また，特殊解は特解ともいう．

問 1　関数 $y = y(x)\ (x \geqq 0)$ は

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \qquad y(0) > 0$$

を満たすとする．

(1)　$\sqrt{y}$ は正の定数 C を用いて

$$\sqrt{y} = \boxed{\mathbf{36}}$$

と表される．

$\boxed{\mathbf{36}}$ の解答群

⓪ $x + C$　① $2x + C$　② $\dfrac{1}{2}x + C$　③ $\dfrac{3}{2}x + C$

④ $x^2 + C$　⑤ $\dfrac{1}{2}x^2 + C$　⑥ Ce^x　⑦ Ce^{2x}

(2)　関数 $y(x)$ がさらに，条件

$$y(2) = 4y(0)$$

を満たすとすると，(1) の C は $C = \boxed{\mathbf{37}}$ となる．また，$y(8) = \boxed{\mathbf{38}}$ である．

$\boxed{\mathbf{37}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

⑥ $\dfrac{1}{3}$　⑦ $\dfrac{2}{3}$　⑧ $\dfrac{4}{3}$　⑨ $\dfrac{8}{3}$　ⓐ $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{\textbf{38}}$ の解答群

⓪ 4	① 5	② 6	③ 7	④ 8	⑤ 9
⑥ 16	⑦ 25	⑧ 36	⑨ 49	ⓐ 64	ⓑ 81

問 2 直線上を動くある物体の時刻 t での速度を $v(t)$ とする．$v = v(t)$ $(t \geqq 0)$ は微分方程式

$$(*) \qquad \frac{dv}{dt} + \frac{a}{1+t}v = b \qquad (a, b \text{ は正の定数})$$

を満たすとする．ここでは定数変化法を用いて $(*)$ の解を求める．

(1) 対応する同次方程式 $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{a}{1+t}v = 0$ の一般解は，任意定数 C を用いて

$$(**) \qquad v(t) = C \boxed{\mathbf{39}}$$

と表される．

$\boxed{\mathbf{39}}$ の解答群

⓪ $e^{-\frac{a}{1+t}}$	① $(1+t)e^{-\frac{a}{1+t}}$	② $\dfrac{1}{1+t}e^{-a(1+t)}$	③ $(1+t)e^{-a(1+t)}$
④ $\dfrac{a}{1+t}$	⑤ $\dfrac{2a}{\sqrt{1+t}}$	⑥ $(1+t)^a$	⑦ $(1+t)^{-a}$
⑧ $\log\|1+t\|^{-a}$	⑨ $\log\dfrac{\|1+t\|}{a}$		

(2) $(**)$ における定数 C を t の関数 $u(t)$ に置き換えて $v(t) = u(t) \cdot \boxed{\mathbf{39}}$ とし，$(*)$ に代入すると，u に関する微分方程式

$$\frac{du}{dt} = \boxed{\mathbf{40}}$$

が得られる．これを解くことにより，$(*)$ の一般解 $v(t)$ が求められる．初期条件 $v(0) = 0$ のもとで $(*)$ の解は

$$v(t) = \boxed{\mathbf{41}}$$

となり，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{v(t)}{t} = \boxed{\mathbf{42}}$ である．

$\boxed{\mathbf{40}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{b}{a}(1+t)$	① $\dfrac{b}{2a}\sqrt{1+t}$	② $b(1+t)^a$	③ $b(1+t)^{-a}$
④ $b\,e^{\frac{a}{1+t}}$	⑤ $\dfrac{b}{1+t}e^{\frac{a}{1+t}}$	⑥ $b(1+t)e^{a(1+t)}$	⑦ $\dfrac{b}{1+t}e^{a(1+t)}$
⑧ $\dfrac{-b}{a\log\|1+t\|}$	⑨ $\dfrac{b}{\log\frac{\|1+t\|}{a}}$		

$\boxed{\mathbf{41}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{bt(2+t)}{2(1+t)}$

① $\dfrac{b}{3}\left(1+t-\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$

② $\dfrac{b}{a+1}\left\{1+t-(1+t)^{-a}\right\}$

③ $\dfrac{a+1}{b}\left\{1+t-(1+t)^{a}\right\}$

④ $\dfrac{b}{a}\left(1+t-e^{\frac{at}{1+t}}\right)$

⑤ $\dfrac{b}{a}(1+t)\left(1-e^{\frac{at}{1+t}}\right)$

⑥ $\dfrac{b}{a^2}\left(a-\dfrac{1}{1+t}-\dfrac{a-1}{1+t}e^{-at}\right)$

⑦ $\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{1}{1+t}-e^{at}\right)$

⑧ $bt(1-\log|1+t|)$

⑨ $t\left(b-\log\dfrac{|1+t|}{a}\right)$

$\boxed{\mathbf{42}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{b}{2}$　③ $\dfrac{b}{3}$　④ $\dfrac{b}{a}$

⑤ $\dfrac{b}{a+1}$　⑥ $\dfrac{a+1}{b}$　⑦ $\dfrac{b}{a}(1-e^{a})$　⑧ ∞　⑨ $-\infty$

問 3 微分方程式

$$(*) \qquad y'' - 2y' + 2y = 2x^2$$

の解 $y(x)$ で，初期条件

$$(**) \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

を満たすものについて考える．

(1) $(*)$ に対応する同次方程式

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

の一般解 y_h は任意定数 C_1, C_2 を用いて

$$y_h = \boxed{\mathbf{43}}$$

と表せる．

$\boxed{\mathbf{43}}$ の解答群

⓪ $C_1 \cos x + C_2 \sin x$	① $x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
② $e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	③ $e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
④ $C_1 + C_2 e^x$	⑤ $C_1 + C_2 e^{-x}$
⑥ $(C_1 + C_2 x)e^x$	⑦ $(C_1 + C_2 x)e^{-x}$

(2) $(*)$ の特殊解で，定数 a, b, c を用いて

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

と表されるものを求めると，$a = \boxed{\mathbf{44}}$，$b = \boxed{\mathbf{45}}$，$c = \boxed{\mathbf{46}}$ となる．

(3) $(*)$ の一般解は

$$y = y_h + y_p$$

であるから，初期条件 $(**)$ を満たすように C_1, C_2 を定めると

$$C_1 = \boxed{\mathbf{47}}, \quad C_2 = \boxed{\mathbf{48}}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{44}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{48}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
	⑤ -1	⑥ -2	⑦ -3	⑧ -4
	⑨ $\dfrac{1}{2}$	ⓐ $\dfrac{3}{2}$	ⓑ $\dfrac{5}{2}$	ⓒ $\dfrac{7}{2}$
	ⓓ $-\dfrac{1}{2}$	ⓔ $-\dfrac{3}{2}$	ⓕ $-\dfrac{5}{2}$	ⓖ $-\dfrac{7}{2}$

問 4　関数 $q(x)$ は実数全体で連続とする．定数 a, b を含む微分方程式

$$(*) \qquad y'' + ay' + by = q(x)$$

は次の 3 つの解 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ をもつとする．

$$f_1(x) = e^x - e^{-x}, \quad f_2(x) = e^x + 2e^{-x}, \quad f_3(x) = e^x - e^{-x} + 2e^{3x}$$

(1)　定数 a, b の値を求めると，$a = \boxed{\textbf{49}}$，$b = \boxed{\textbf{50}}$ である．また，$q(x) = \boxed{\textbf{51}}$ である．

$\boxed{\textbf{49}}$ ・ $\boxed{\textbf{50}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

$\boxed{\textbf{51}}$ の解答群

⓪ e^{-x}	① e^x	② e^{3x}	③ $-e^{-x}$	④ $-e^x$	⑤ $-e^{3x}$
⑥ $2e^{-x}$	⑦ $2e^x$	⑧ $2e^{3x}$	⑨ $-2e^{-x}$	ⓐ $-2e^x$	ⓑ $-2e^{3x}$
ⓒ $4e^{-x}$	ⓓ $4e^x$	ⓔ $4e^{3x}$	ⓕ $-4e^{-x}$	ⓖ $-4e^x$	ⓗ $-4e^{3x}$

(2)　初期条件 $y(0) = 0$，$y'(0) = 10$ を満たす $(*)$ の解を

$$y = Ae^{-x} + Be^x + Ce^{3x} \qquad (A,\ B,\ C \text{ は定数})$$

と表したとき，$A = \boxed{\textbf{52}}$，$B = \boxed{\textbf{53}}$，$C = \boxed{\textbf{54}}$ である．

$\boxed{\textbf{52}}$ ～ $\boxed{\textbf{54}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

計算用紙

第4分野　確率・統計

〔問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{55}}$ 〜 $\boxed{\textbf{73}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1　(1)　確率変数 X, Y が独立で，確率分布がともに

X の値（Y の値）	-3	-2	0	1	3
確率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

(a は定数)

で与えられているとき，$E(X) = E(Y) = \boxed{\textbf{55}}$，$V(X) = V(Y) = \boxed{\textbf{56}}$ である．また

$$V\left(\frac{X+Y}{2}+3\right) = \boxed{\textbf{57}}$$

である．

$\boxed{\textbf{55}}$ 〜 $\boxed{\textbf{57}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ -1　⑦ $\frac{1}{2}$　⑧ $\frac{3}{2}$　⑨ $\frac{5}{2}$　ⓐ $\frac{7}{2}$　ⓑ $\frac{11}{2}$

ⓒ $-\frac{1}{3}$　ⓓ $\frac{1}{3}$　ⓔ $\frac{1}{4}$　ⓕ $\frac{3}{4}$　ⓖ $\frac{5}{4}$　ⓗ $\frac{17}{4}$

(2)　2 つの機械 A, B があり，それぞれの使用開始から故障までの時間を確率変数 X, Y で表す．またそれらの分布関数を

$$F(t) = P(X \leqq t), \qquad G(t) = P(Y \leqq t)$$

とおく．いま A と B を組み合わせてできる装置 S の故障について考える．ただし A と B は互いに影響を与えない，すなわち X, Y は独立とする．

(i)　A, B が両方とも故障してはじめて S が故障するとする．このとき，S の使用開始から故障までの時間が t 以下である確率は $\boxed{\mathbf{58}}$ である．

(ii)　A, B の少なくとも一方が故障したとき S が故障するとする．このとき，S の使用開始から故障までの時間が t 以下である確率は $\boxed{\mathbf{59}}$ である．

$\boxed{\mathbf{58}}$ ・ $\boxed{\mathbf{59}}$ の解答群

⓪ $F(t)+G(t)$	① $\lvert F(t)-G(t)\rvert$	② $F(t)$
③ $F(t)+G(t)-F(t)G(t)$	④ $F(t)G(t)$	⑤ $G(t)$
⑥ $F(t)+G(t)+F(t)G(t)$	⑦ $\dfrac{G(t)}{F(t)}$	⑧ $\dfrac{F(t)}{G(t)}$

問 2　a を定数とする．確率変数 X の確率密度関数 $f_X(x)$ が

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & (0 \leqq x \leqq 5) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 5) \end{cases}$$

で与えられている．

(1)　確率の性質から $a =$ $\boxed{\mathbf{60}}$ である．また，X の分布関数を $F_X(x) = P(X \leqq x)$ とすると

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \boxed{\mathbf{61}} & (0 \leqq x \leqq 5) \\ 1 & (x > 5) \end{cases}$$

と表せる．

$\boxed{\mathbf{60}}$ の解答群

⓪ 0　① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{1}{25}$　④ $\frac{2}{25}$　⑤ 1

$\boxed{\mathbf{61}}$ の解答群

⓪ 0　① $\frac{1}{5}x$　② $\frac{2}{5}x$　③ $\frac{1}{25}x$　④ $\frac{2}{25}x$　⑤ x

⑥ $\frac{1}{2}x^2$　⑦ $\frac{1}{5}x^2$　⑧ $\frac{1}{10}x^2$　⑨ $\frac{1}{25}x^2$　ⓐ $\frac{1}{50}x^2$

(2)　確率変数 $Y = X^2 + 1$ に対して，Y の分布関数を $F_Y(y)$ とする．$y \geqq 1$ のとき $F_Y(y) = P(Y \leqq y) = P(X \leqq$ $\boxed{\mathbf{62}}$ $) = F_X($ $\boxed{\mathbf{62}}$ $)$ より

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & (y < 1) \\ \boxed{\mathbf{63}} & (1 \leqq y \leqq 26) \\ 1 & (y > 26) \end{cases}$$

である．また，Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ は $1 < y < 26$ において

$$f_Y(y) = \boxed{\mathbf{64}}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{62}}$ ・ $\boxed{\mathbf{63}}$ の解答群

⓪ $y+1$	① $y-1$	② $\dfrac{1}{25}(y+1)$	③ $\dfrac{1}{25}(y-1)$
④ $(y+1)^2$	⑤ $(y-1)^2$	⑥ $\dfrac{1}{25}(y+1)^2$	⑦ $\dfrac{1}{25}(y-1)^2$
⑧ $\sqrt{y+1}$	⑨ $\sqrt{y-1}$	ⓐ $\dfrac{1}{25}\sqrt{y+1}$	ⓑ $\dfrac{1}{25}\sqrt{y-1}$

$\boxed{\mathbf{64}}$ の解答群

⓪ 0	① $\dfrac{1}{25}$	② $\dfrac{2}{25}$	③ 1
④ $2(y+1)$	⑤ $2(y-1)$	⑥ $\dfrac{2}{25}(y+1)$	⑦ $\dfrac{2}{25}(y-1)$
⑧ $\dfrac{1}{2\sqrt{y+1}}$	⑨ $\dfrac{1}{2\sqrt{y-1}}$	ⓐ $\dfrac{1}{50\sqrt{y+1}}$	ⓑ $\dfrac{1}{50\sqrt{y-1}}$

問 3　原点 O から出発し，数直線上を移動する点 A がある．点 A は 1 回ごとに，確率 p で正の向きに 3 移動し，確率 $1-p$ で負の向きに 1 移動する．16 回移動した後の点 A の座標を X とおくとき，X の平均が $E(X)=8$ となるように p の値を定めたい．
16 回の移動の中で正の向きに移動した回数を Y とおけば $X=$ **65** が成り立つ．
また，Y は二項分布 $B(16,p)$ に従うから $E(Y)=$ **66** である．したがって $E(X)=8$ より $p=$ **67** であり，このとき，X の標準偏差は $D(X)=$ **68** である．

65 の解答群

⓪ 0　① Y　② $2Y$　③ $3Y$　④ $4Y$

⑤ 8　⑥ $Y+8$　⑦ $Y-8$　⑧ $2Y+16$　⑨ $2Y-16$

ⓐ $3Y+16$　ⓑ $3Y-16$　ⓒ $4Y+16$　ⓓ $4Y-16$

66 の解答群

⓪ 0　① 4　② 8　③ 16

④ $8p$　⑤ $8(1-p)$　⑥ $8p(1-p)$　⑦ $2\sqrt{2p(1-p)}$

⑧ $16p$　⑨ $16(1-p)$　ⓐ $16p(1-p)$　ⓑ $4\sqrt{p(1-p)}$

67 の解答群

⓪ 0　① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{5}{6}$　⑤ $\frac{3}{8}$　⑥ $\frac{5}{8}$

⑦ $\frac{7}{8}$　⑧ $\frac{3}{10}$　⑨ $\frac{5}{10}$　ⓐ $\frac{7}{10}$　ⓑ $\frac{5}{12}$　ⓒ $\frac{7}{12}$　ⓓ $\frac{11}{12}$

68 の解答群

⓪ 0　① $\sqrt{3}$　② $\sqrt{5}$　③ $\sqrt{7}$　④ $\sqrt{11}$　⑤ $\sqrt{15}$

⑥ $2\sqrt{3}$　⑦ $2\sqrt{5}$　⑧ $2\sqrt{7}$　⑨ $2\sqrt{11}$　ⓐ $2\sqrt{15}$

ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　ⓒ $\frac{\sqrt{5}}{2}$　ⓓ $\frac{\sqrt{7}}{2}$　ⓔ $\frac{\sqrt{11}}{2}$　ⓕ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

計算用紙

問 4　ある測量機器を用いて 2 点 A, B 間の距離を測定する．測定回数 n を $n = 9$ としたところ，測定値の平均は 100 m であった．各回の距離の測定値には誤差が含まれる．ここで，誤差とは測定値から真の距離を引いた値を指し，各回の誤差は独立であるとする．また，誤差は平均 0 m，標準偏差 0.009 m の正規分布 $N(0, 0.009^2)$ に従うと仮定する．このとき，A, B 間の真の距離 μ m の，信頼度 95%での信頼区間を求めたい．

まず，k 回目 $(k = 1, 2, \ldots, 9)$ の測定値を表す確率変数を X_k とおくと，X_k は正規分布 $N\left(\boxed{\mathbf{69}}, 0.009^2\right)$ に従う．したがって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_9}{9}$$

は正規分布 $N\left(\boxed{\mathbf{69}}, \boxed{\mathbf{70}}\right)$ に従う．そこで

$$Z = \frac{\overline{X} - \boxed{\mathbf{69}}}{\boxed{\mathbf{71}}}$$

とおけば，Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である．正規分布表によれば

$$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

であることがわかるので

$$P\left(\overline{X} - \boxed{\mathbf{72}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + \boxed{\mathbf{72}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

が成り立つ．以上より，求める信頼区間は

$$\left[100 - \boxed{\mathbf{72}}, 100 + \boxed{\mathbf{72}}\right]$$

であり，その幅は $2 \times \boxed{\mathbf{72}}$ である．なお，同じ状況で測定回数 n のみを変えて，信頼区間の幅を 0.01 未満とするための最小の測定回数は $\boxed{\mathbf{73}}$ 回である．

$\boxed{\mathbf{69}}$ の解答群

⓪ 0	① 3	② 9	③ 81	④ 95
⑤ 100	⑥ 0.009	⑦ 0.95	⑧ $\frac{100}{9}$	⑨ $\frac{\mu}{9}$
ⓐ μ	ⓑ 9μ	ⓒ $\mu + 100$	ⓓ $\mu - 100$	ⓔ $-\mu + 100$

$\boxed{\mathbf{70}}$ ・ $\boxed{\mathbf{71}}$ の解答群

⓪ 0	① 9	② 100	③ 0.003
④ 0.009	⑤ 3×0.009	⑥ 9×0.009	⑦ $\dfrac{0.009^2}{9}$
⑧ $\dfrac{0.009^2}{3}$	⑨ 0.009^2	ⓐ 3×0.009^2	ⓑ 9×0.009^2

$\boxed{\mathbf{72}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1.96}{0.003}$	① 1.96×0.003	② 1.96×0.003^2	③ 1.96×3
④ $\dfrac{1.96}{0.009}$	⑤ 1.96×0.009	⑥ 1.96×0.009^2	⑦ 1.96×9

$\boxed{\mathbf{73}}$ の解答群

⓪ 10	① 11	② 12	③ 13	④ 14
⑤ 15	⑥ 16	⑦ 17	⑧ 18	⑨ 19