全国工学系学部

工学系数学統一試験

2005年12月17日（土曜）

午後1時30分 〜 午後4時

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること.

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと.

(3) 開始の合図の後，表紙裏の**解答上の注意**を読むこと.

(4) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及びマークシートの汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること.

(5) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること.

(6) マークシートを汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること.

(7) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと.

(8) 試験時間は **150 分**である．**試験開始 90 分後から退席を認める**.

(9) 問題冊子は持ち帰ること.

(10) 気分が悪くなった場合は手を挙げて監督者に知らせること.

(11) その他，監督者の指示に従うこと.

解答上の注意

(1) 解答は，各問題の指示にしたがってマークシートにマークすること．例えば，$\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して ⓒと解答する場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 空欄に入れる **適当なものがない場合** には， ⓘをマークすること．

(3) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(4) log は自然対数とする．

このページは意図的に空白としている．計算用紙として利用してよい．

第 1 問　〔解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{11}}$ 〕　（配点 60 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

問 1　xyz 空間において，関数 $z = x^2 + 3y^2$ で定義される曲面上の点 $(x, y, z) = (1, 2, 13)$ における接平面とベクトル $\boxed{\mathbf{1}}$ は直交する．

$\boxed{\mathbf{1}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} -2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$　⑥ $\begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$

問 2　a を正の定数とする．不定積分 $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$ を求めるために，$t = x + \sqrt{x^2+a}$ とおくと

$$x = \boxed{\textbf{2}}, \quad \sqrt{x^2+a} = \boxed{\textbf{3}}, \quad \frac{dx}{dt} = \boxed{\textbf{4}}$$

であるから，$I = \displaystyle\int \boxed{\textbf{5}}\, dt$ となる．これより $I = \boxed{\textbf{6}} + C$ (C は積分定数) である．

$\boxed{\textbf{2}}$ 〜 $\boxed{\textbf{5}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{t^2+a^2}{2}$	① $\dfrac{t^2-a^2}{2}$	② $\dfrac{t^2+a}{2}$	③ $\dfrac{t^2-a}{2}$
④ $\dfrac{t^2+a^2}{2t}$	⑤ $\dfrac{t^2-a^2}{2t}$	⑥ $\dfrac{t^2+a}{2t}$	⑦ $\dfrac{t^2-a}{2t}$
⑧ $\dfrac{t^2+a^2}{2t^2}$	⑨ $\dfrac{t^2-a^2}{2t^2}$	ⓐ $\dfrac{t^2+a}{2t^2}$	ⓑ $\dfrac{t^2-a}{2t^2}$
ⓒ $\dfrac{1}{t}$	ⓓ $\dfrac{1}{t^2}$	ⓔ t	

$\boxed{\textbf{6}}$ の解答群

⓪ $\log\left\|\dfrac{x+a}{x-a}\right\|$	① $\log\left\|\dfrac{x-a}{x+a}\right\|$	② $\log\|x^2-a^2\|$
③ $\log\|x^2-a\|$	④ $\log(x^2+a^2)$	⑤ $\log(x^2+a)$
⑥ $\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$	⑦ $\log(x+\sqrt{x^2+a})$	⑧ $\tan^{-1}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)$
⑨ $\tan^{-1}(x^2-a^2)$	ⓐ $\tan^{-1}(x^2-a)$	ⓑ $\tan^{-1}(x^2+a^2)$
ⓒ $\tan^{-1}(x^2+a)$	ⓓ $\tan^{-1}(x+\sqrt{x^2+a^2})$	ⓔ $\tan^{-1}(x+\sqrt{x^2+a})$

(注) 記号 $\tan^{-1}$ は arctan とも表される．

問 3 関数 $f(x) = (x+2)e^x$ のマクローリン展開を $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とするとき，$a_3 =$ $\boxed{\textbf{7}}$，$a_4 =$ $\boxed{\textbf{8}}$ である．

$\boxed{7}$，$\boxed{8}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 4	④ $\frac{1}{2}$	⑤ $\frac{3}{2}$
⑥ $\frac{1}{4}$	⑦ $\frac{3}{4}$	⑧ $\frac{5}{4}$	⑨ $\frac{1}{6}$	ⓐ $\frac{5}{6}$	ⓑ $\frac{7}{6}$
ⓒ $\frac{1}{8}$	ⓓ $\frac{3}{8}$	ⓔ $\frac{5}{8}$	ⓕ $\frac{7}{8}$	ⓖ $\frac{9}{8}$	

問 4 $\lim_{x\to\infty}(3x - \sqrt{9x^2 - 3x - 1}) =$ $\boxed{\textbf{9}}$．

$\boxed{9}$ の解答群

⓪ $-\frac{1}{3}$	① $\frac{1}{3}$	② $-\frac{1}{2}$	③ $\frac{1}{2}$	④ 0	⑤ -1	⑥ 1
⑦ -2	⑧ 2	⑨ ∞	ⓐ $-\infty$			

問 5 xy 平面上の集合 $\{(x,y) : 1 \leqq y \leqq x^2,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ を D で表すとき，

$$\iint_D \frac{x}{y^2}\,dxdy = \boxed{\textbf{10}} - \log \boxed{\textbf{11}}$$

である．

$\boxed{10}$，$\boxed{11}$ の解答群

⓪ -3	① 3	② -2	③ 2	④ -1	⑤ 1
⑥ 0	⑦ $-\pi$	⑧ π	⑨ $-\frac{3}{2}$	ⓐ $\frac{3}{2}$	ⓑ $-\frac{1}{2}$
ⓒ $\frac{1}{2}$	ⓓ $-\frac{\pi}{2}$	ⓔ $\frac{\pi}{2}$	ⓕ $-\frac{\pi}{3}$	ⓖ $\frac{\pi}{3}$	

計算用紙

第 2 問　〔解答番号 $\boxed{12}$ ～ $\boxed{20}$〕　（配点 40 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

問 1　xy 平面上の図形 A とその上で定義され非負の値をとる関数 $\rho(x,y)$ に対して，

$$M = \iint_A \rho(x,y)dxdy,$$

$$X = \frac{1}{M}\iint_A x\rho(x,y)\,dxdy, \qquad Y = \frac{1}{M}\iint_A y\rho(x,y)\,dxdy$$

とおく．このとき点 (X,Y) を密度 ρ に関する A の重心という．特に

$$A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\},$$

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 2 & (x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0,\ x \geqq 0 \quad \text{のとき}) \\ 1 & (x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0,\ x < 0 \quad \text{のとき}) \end{cases}$$

のとき，$M = \boxed{12}$ であり，$(X,Y) = \left(\boxed{13}, \boxed{14}\right)$ である．

$\boxed{12}$ ～ $\boxed{14}$ の解答群

⓪ $\frac{\pi}{4}$	① $\frac{\pi}{2}$	② $\frac{3\pi}{4}$	③ π	④ $\frac{1}{4\pi}$	⑤ $\frac{1}{2\pi}$
⑥ $\frac{3}{4\pi}$	⑦ $\frac{1}{\pi}$	⑧ $\frac{1}{3\pi}$	⑨ $\frac{2}{3\pi}$	ⓐ $\frac{5}{6\pi}$	ⓑ $\frac{4}{3\pi}$
ⓒ $\frac{1}{9\pi}$	ⓓ $\frac{2}{9\pi}$	ⓔ $\frac{4}{9\pi}$	ⓕ $\frac{5}{9\pi}$		

問 2 関数 $g(u,v)$ は変数 u,v について 2 回偏微分可能で $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ が成り立つとする．$u = x + y$, $v = xy$ とおいて，x, y の関数 $f(x,y)$ を $f(x,y) = g(x+y, xy)$ で定義する．このとき,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x+y,xy)\,\boxed{\mathbf{15}} + \frac{\partial g}{\partial v}(x+y,xy)\,\boxed{\mathbf{16}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x+y,xy) + \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x+y,xy)\,\boxed{\mathbf{17}} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x+y,xy)\,\boxed{\mathbf{18}}$$
$$+\frac{\partial g}{\partial u}(x+y,xy)\,\boxed{\mathbf{19}} + \frac{\partial g}{\partial v}(x+y,xy)\,\boxed{\mathbf{20}}$$

である．

$\boxed{15}$ 〜 $\boxed{20}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ x	⑤ y
⑥ x^2	⑦ y^2	⑧ $(x+y)$	⑨ $(x-y)$	ⓐ xy	

第 3 問　〔解答番号 $\boxed{\textbf{21}}$ ～ $\boxed{\textbf{33}}$ 〕　（配点 55 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

問 1　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{\textbf{21}}$ である．

$\boxed{\textbf{21}}$ の解答群

⓪ -3　① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2　⑥ 3　⑦ 4　⑧ 5　⑨ 6

問 2　$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\textbf{22}}$ である．

(2)　2 以上の自然数 n について，行列式 $|A^n - A^{n-1}|$ の値は $\boxed{\textbf{23}} \cdot \boxed{\textbf{24}}^{\,n-1}$ である．

$\boxed{\textbf{22}}$ ～ $\boxed{\textbf{24}}$ の解答群

⓪ -3　① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2　⑥ 3　⑦ 4　⑧ 5　⑨ 6

問 3　(1)　3 つの連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x+\ \ y+3z &= \ \ 1 \\ x+2y+4z &= \ \ 1 \\ 2x-y+3z &= -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+\ \ y+3z &= \ \ 1 \\ x+2y+4z &= \ \ 2 \\ 2x-y+3z &= -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+\ \ y+3z &= 1 \\ x+2y+4z &= 2 \\ 2x-y+3z &= 1 \end{cases}$$

の中で解をもつのは左から $\boxed{\textbf{25}}$ 番目の連立 1 次方程式である.

(2)　左から $\boxed{\textbf{25}}$ 番目の連立 1 次方程式の解は, 次の組 (x, y, z) の中に $\boxed{\textbf{26}}$ 個ある.

$$(-4,-1,2),\ (-4,-2,2),\ (-2,0,1),\ (0,1,0)$$

$\boxed{\textbf{25}}$, $\boxed{\textbf{26}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

問 4 a を正の定数とする．3 次元実数ベクトル

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

を考える．$\boldsymbol{u}_3$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ と同様に大きさ (長さ) が 1 とする．

(1) a の値は $\boxed{\mathbf{27}}$ である．

(2) ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積を $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ で表す．$\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_3 = 0$ に注意すれば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_2 + 3\boldsymbol{u}_3$ のとき，

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_1 = \boxed{\mathbf{28}},\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_2 = \boxed{\mathbf{29}},\quad \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}_3 = \boxed{\mathbf{30}}$$

である．

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$，$\boldsymbol{u}_3$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \frac{\boxed{\mathbf{31}}}{\sqrt{3}}\boldsymbol{u}_1 + \frac{\boxed{\mathbf{32}}}{\sqrt{6}}\boldsymbol{u}_2 + \frac{\boxed{\mathbf{33}}}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}_3$$

と表せる．

$\boxed{\mathbf{27}}$ ～ $\boxed{\mathbf{33}}$ の解答群

⓪ -3　① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2　⑥ 3　⑦ 4　⑧ 5　⑨ 6

計算用紙

第 4 問　〔解答番号 $\boxed{34}$ 〜 $\boxed{39}$ 〕　（配点 45 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

(注意) $\mathbb{R}^2$ は 2 次元実数ベクトル空間，$\mathbb{R}^3$ は 3 次元実数ベクトル空間を表す．

問 1　4 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が張る $\mathbb{R}^3$ の部分空間の次元は $\boxed{34}$ である．

$\boxed{34}$ の解答群

⓪ 1　① 2　② 3　③ 4

問 2　a, b, c を実数とする．$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 T を，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ に対して

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + ax_1x_2 \\ bx_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

と定め，$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & c \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1)　$\mathbb{R}^2$ のすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ について $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表せるとき，$a = \boxed{35}$，$b = \boxed{36}$，$c = \boxed{37}$ である．

(2)　T が (1) の条件を満たすとする．$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ d \end{pmatrix}$ について，$\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$ となる $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在するのは $d = \boxed{38}$ のときである．

$\boxed{35}$ 〜 $\boxed{38}$ の解答群

⓪ -3　① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2　⑥ 3　⑦ 4　⑧ 5　⑨ 6

問 3　実対称行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ は，適当な直交行列 P を用いて

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\mathbf{39}} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

と表せる.

$\boxed{\mathbf{39}}$ の解答群

⓪ -3　① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2　⑥ 3　⑦ 4　⑧ 5　⑨ 6

第 5 問　〔解答番号 $\boxed{40}$ ～ $\boxed{47}$ 〕　（配点 50 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

(注意) 各問における y は x の関数 $y(x)$ であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．

問 1　微分方程式 $y' = x$ の一般解は $y = \boxed{40}$ であり，微分方程式 $y' = 1 + y^2$ の一般解は $y = \boxed{41}$ である．また， $x > 0$ のとき，微分方程式 $xy' = 1$ の一般解は $y = \boxed{42}$ である．

$\boxed{40}$ ～ $\boxed{42}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{x^2} + c$	① ce^x	② $\dfrac{1}{2}x^2 + c$	③ $\tan(x + c)$
④ $\log x + c$	⑤ $x + c$	⑥ $c\sqrt{1 - x^2}$	⑦ $c\sqrt{1 - (x - 1)^2}$
⑧ $x^2 + c$	⑨ $\dfrac{c}{x^2}$	ⓐ $\dfrac{1}{x} + c$	ⓑ $c\sqrt{1 + (x - 1)^2}$
ⓒ $c\sqrt{1 + x^2}$	ⓓ e^{cx}	ⓔ $c\sqrt{x}$	ⓕ $c\sqrt{1 + (x + 1)^2}$

(c は任意定数)

問 2　微分方程式 $y' = y$ の解で $y(-1) = 1$ を満たすものは $y = \boxed{43}$ であり，微分方程式 $x + yy' = 1$ の解で $y(1) = 1$ を満たすものは $y = \boxed{44}$ である．

$\boxed{43}$，$\boxed{44}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{x^2}$	① $\sqrt{x + 2}$	② e^{x+1}	③ $\sqrt{1 + (x + 1)^2}$
④ x	⑤ $\sqrt{1 - x^2}$	⑥ x^2	⑦ $\sqrt{1 + (x - 1)^2}$
⑧ e^x	⑨ $\sqrt{1 + x^2}$	ⓐ $\sqrt{\lvert x \rvert}$	ⓑ $\sqrt{1 - (x - 1)^2}$

問 3　(1)　関数 $y = 3\cos\sqrt{2}x + 5\sin\sqrt{2}x$ が解となる微分方程式は $\boxed{\mathbf{45}}$ である．

$\boxed{\mathbf{45}}$ の解答群

⓪ $y'' + 2y = 0$　① $y'' + \sqrt{2}y = 0$　② $y'' - 2y = 0$　③ $y'' - \sqrt{2}y = 0$

④ $y'' + 4y = 0$　⑤ $y'' - 4y = 0$　⑥ $y'' + 2y = 1$　⑦ $y'' - 2y = 1$

⑧ $y'' + \sqrt{2}y = 1$　⑨ $y'' - \sqrt{2}y = 1$

(2)　微分方程式

$$y'' + 2y = \cos x$$

の解で初期条件

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

を満たすものは $y = \boxed{\mathbf{46}}$ である．

$\boxed{\mathbf{46}}$ の解答群

⓪ $\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x$　① $\cos x + \cos\sqrt{2}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x$

② $\cos x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x$　③ $\cos x + \cos\sqrt{2}x$

④ $\sin x + \cos\sqrt{2}x$　⑤ $\cos x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\sqrt{2}x + \sin\sqrt{2}x$

問 4　関数 $y = 4e^{2x} - e^{-3x} + 5e^{-x}$ が解となる微分方程式は $\boxed{\mathbf{47}}$ である．

$\boxed{\mathbf{47}}$ の解答群

⓪ $y'' + 2y' - 3y = 35e^{-x}$

① $y'' + 4y' + 3y = 60e^{2x}$

② $y'' - y' - 2y = 14e^{2x}$

第 6 問　〔解答番号 $\boxed{48}$ ～ $\boxed{56}$〕　(配点 50 点)

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

(注意) 各問における y は x の関数 $y(x)$ であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．

問 1　a を正の定数とする．微分方程式

$$y'' + 2ay' + a^2y = 0$$

の一般解は $y = \boxed{48}$ である．

$\boxed{48}$ の解答群

⓪ $c_1e^{x} + c_2e^{-x}$　① $c_1e^{-ax} + c_2xe^{-ax}$　② $c_1e^{ax}\sin x + c_2e^{ax}\cos x$

③ $c_1e^{ax} + c_2xe^{ax}$　④ $c_1\sin x + c_2\cos 2x$　⑤ $c_1e^{ax}\sin x + c_2e^{-ax}\cos x$

⑥ $c_1e^{x} + c_2xe^{-x}$　⑦ $c_1\sin ax + c_2\cos ax$

(c_1, c_2 は任意定数)

問 2　a を正の定数とする．実数 α, β と $-\infty < x < \infty$ で連続な関数 $f(x)$ に対して初期値問題

$$(*)\quad \begin{cases} y'' + 2ay' + a^2y = f(x) \quad \cdots (*1) \\ y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

は $-\infty < x < \infty$ において解をもつことが知られている．もし $(*)$ が解 $y_1(x), y_2(x)$ をもつとすれば，

$$y_0(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

とおくと，$\boxed{49}$ であるから，関数 $y_0(x)$ は初期値問題

$$(**)\quad \begin{cases} y'' + 2ay' + a^2y = 0 \\ y(0) = \boxed{50},\ y'(0) = \boxed{51} \end{cases}$$

の解である．

$\boxed{49}$ の解答群

⓪ a が正　① $(*)$ の解 y_1, y_2 が 1 次独立

② $(*)$ の解 y_1, y_2 が 1 次従属　③ $(*1)$ が線形の微分方程式

④ $(*1)$ が 2 階の微分方程式

$\boxed{50}$, $\boxed{51}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ -1　④ -2　⑤ α　⑥ β　⑦ $\alpha-\beta$　⑧ $\alpha+\beta$　⑨ $\beta-\alpha$

ところで，初期値問題 $(**)$ は，変換

$$z(x) = e^{ax}y(x)$$

を行えば，$z(x)$ に関する初期値問題

$$\begin{cases} \boxed{52} = 0 \\ z(0) = \boxed{53}, \; z'(0) = \boxed{54} \end{cases}$$

になる．この初期値問題を解けば $z = \boxed{55}$ を得る．

したがって，初期値問題 $(*)$ の解はちょうど $\boxed{56}$ 個である．

$\boxed{52}$ の解答群

⓪ $z'' - a^2 z$　① $z'' + a^2 z$　② $z'' + az$　③ $z'' - az$
④ $a^2 z'' + z$　⑤ $a^2 z'' - z$　⑥ z''

$\boxed{53}$ 〜 $\boxed{55}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ -1　④ -2
⑤ x　⑥ x^2　⑦ $-x$　⑧ $-x^2$　⑨ $x+1$
ⓐ $-x+1$　ⓑ $\sin ax$　ⓒ $\cos\sqrt{a}x$　ⓓ e^{ax}　ⓔ $e^{\frac{x}{a}}$

$\boxed{56}$ の解答群

⓪ 1　① 2　② 3　③ 4

第 7 問　〔解答番号 $\boxed{57}$ ～ $\boxed{65}$ 〕　（配点 50 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

問 1　確率変数 X に対し，$E(X)$ を X の期待値とする．このとき

$$E\left(\{X - E(X)\}^2\right) = E\left(\boxed{57}\right) - \left\{E\left(\boxed{58}\right)\right\}^2$$

である．

$\boxed{57}$，$\boxed{58}$ の解答群

⓪ $\sqrt{X}$　① X　② X^2　③ X^3　④ $2\sqrt{X}$　⑤ $2X$　⑥ $2X^2$　⑦ $2X^3$

問 2　正規分布の母平均を区間推定するとき，信頼度 (信頼係数) を変えずに標本の大きさを大きくすると信頼区間は $\boxed{59}$．また，標本の大きさを変えずに信頼度を大きくすると信頼区間は $\boxed{60}$．

問 3　確率変数 X, Y は共に 2 次モーメントが存在するものとする．このとき X と Y が独立ならば，X と Y の共分散は $\boxed{61}$ である．

問 4　確率変数 X の分布関数を $F_X(x) = P(X \leqq x)$ とする．このとき $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \boxed{62}$，$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = \boxed{63}$ である．

問 5　確率変数 X, Y は独立で共に平均 3 および分散 1 の正規分布 $N(3, 1^2)$ に従うものとする．このとき $X - Y$ の平均は $\boxed{64}$ であり分散は $\boxed{65}$ である．

$\boxed{59}$ ～ $\boxed{65}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6
⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ ∞　ⓑ $-\infty$
ⓒ 狭くなる　ⓓ 広くなる　ⓔ 変わらない

計算用紙

第 8 問　〔解答番号 $\boxed{\textbf{66}}$ ～ $\boxed{\textbf{73}}$ 〕　（配点 50 点）

以下の空欄に，それぞれの解答群から適当なものを選んでマークせよ．

問 1　確率変数 X の密度関数が

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}} & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられているとする．ただし，$\lambda > 0$ は未知のパラメータである．X の n 個の観測値が $x_i \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ であるときの λ の最尤（ゆう）推定値 $\hat{\lambda}$ を求めたい．観測値の組を $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ と書くことにすると，$\hat{\lambda}$ は尤度関数

$$L(\lambda;\boldsymbol{x}) = \left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x_1}{\lambda}}\right)\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x_2}{\lambda}}\right)\cdots\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x_n}{\lambda}}\right)$$

を最大にする λ として求められる．計算を簡単にするため $L(\lambda;\boldsymbol{x})$ の自然対数を $l(\lambda;\boldsymbol{x})$ とすると，

$$l(\lambda;\boldsymbol{x}) = -n\log\lambda - \boxed{\textbf{66}}$$

となり，極値を求めるため λ で微分すると

$$\frac{dl}{d\lambda}(\lambda;\boldsymbol{x}) = -\frac{n}{\lambda} + \boxed{\textbf{67}}$$

となる．ここで $\dfrac{dl}{d\lambda}(\lambda;\boldsymbol{x}) = 0$ を満たす λ を求め $l(\lambda;\boldsymbol{x})$ の増減を調べることにより，$\lambda = \boxed{\textbf{68}}$ で $l(\lambda;\boldsymbol{x})$ が最大になることがわかる．したがって最尤推定値 $\hat{\lambda} = \boxed{\textbf{68}}$ である．

$\boxed{\textbf{66}}$ ～ $\boxed{\textbf{68}}$ の解答群

⓪ $\lambda\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$　① $\dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$　② $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e^{-\frac{x_i}{\lambda}}$　③ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{x_i}{\lambda}}$　④ $\dfrac{1}{\lambda^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e^{-\frac{x_i}{\lambda}}$

⑤ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$　⑥ $\dfrac{1}{\lambda^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$　⑦ $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$　⑧ $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$　⑨ $n\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$

問 2　確率変数 X, Y が独立で同一の二項分布 $B\left(5, \dfrac{2}{3}\right)$ に従うものとするとき，条件付き確率 $P(Y=1 \mid X+Y=2)$ を求めたい．

X, Y は二項分布 $B\left(5, \dfrac{2}{3}\right)$ に従うから確率関数 $p(k)=P(X=k)=P(Y=k)$ は

$$p(k) = \boxed{\textbf{69}}, \quad k=0,1,\ldots,5$$

である．$P(Y=1 \mid X+Y=2)$ は条件 $X+Y=2$ の下での $Y=1$ となる確率である．X, Y はともに 0 以上の整数値をとるから，条件 $X+Y=2$ を満たすのは $(X,Y)=(0,2),(1,1),(2,0)$ の 3 つの場合のみである．X, Y は独立であるから

$$P(X=0, Y=2) = p(0)p(2) = \boxed{\textbf{70}}$$

$$P(X=1, Y=1) = \boxed{\textbf{71}}$$

$$P(X=2, Y=0) = \boxed{\textbf{72}}$$

となる．このうち $Y=1$ となるのは $(X,Y)=(1,1)$ のときのみである．したがって，

$$P(Y=1 \mid X+Y=2) = \boxed{\textbf{73}}$$

となる．

$\boxed{69}$ の解答群

⓪ ${}_5\mathrm{C}_k \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5k}$　① ${}_k\mathrm{C}_2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5k}$　② $5k \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5k}$

③ ${}_5\mathrm{C}_k \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-k}$　④ ${}_k\mathrm{C}_2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-k}$　⑤ $5k \left(\dfrac{2}{3}\right)^k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-k}$

$\boxed{70}$ ～ $\boxed{73}$ の解答群

⓪ $\dfrac{2}{3^2}$　① $\dfrac{4}{3^2}$　② $\dfrac{5}{3^2}$　③ $\dfrac{8}{3^2}$　④ $\dfrac{5}{3^3}$　⑤ $\dfrac{8}{3^3}$　⑥ $\dfrac{10}{3^3}$　⑦ $\dfrac{25}{3^3}$

⑧ $\dfrac{10}{3^5}$　⑨ $\dfrac{25}{3^5}$　ⓐ $\dfrac{40}{3^5}$　ⓑ $\dfrac{80}{3^5}$　ⓒ $\dfrac{40}{3^{10}}$　ⓓ $\dfrac{80}{3^{10}}$　ⓔ $\dfrac{100}{3^{10}}$　ⓕ $\dfrac{160}{3^{10}}$