EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2020年12月19日（土）

4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分

3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分

2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分

1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊ 受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．

(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．

(8) 問題冊子は持ち帰ること．

(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\textbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ には $\boxed{\textbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\textbf{23}}$ は $(\boxed{\textbf{23}})$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2 - \boxed{\textbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．また，自然数 n に対し，$\mathbb{R}^n$ は n 次元実ベクトル空間とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{16}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある． 各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1}x \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問１　関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x + \tan^{-1}x - \sqrt{3}$$

とするとき

$$f\left(\sqrt{3}\right) = \boxed{\mathbf{1}}, \qquad f'\left(\sqrt{3}\right) = \boxed{\mathbf{2}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{1}}$ **の解答群**

⓪ 0　① $\dfrac{1}{2}$　② 1　③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\dfrac{\pi}{6}$　⑥ $\dfrac{\pi}{3}$　⑦ $\dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{2}{3}$　① $\dfrac{3}{2}$　② $\dfrac{4}{5}$　③ $\dfrac{5}{4}$

④ $\dfrac{4}{7}$　⑤ $\dfrac{7}{4}$　⑥ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1$　⑦ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1$

解説

x が $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にあるとき，$\tan x = \sqrt{3}$ を満たすのは $x = \dfrac{\pi}{3}$ である．すなわち $\tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$ が得られる．これより

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \tan^{-1}\sqrt{3} - \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

となるため $\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ⑥ である．

$y = \tan^{-1} x$ とおくと $\tan x = y$ であるから，この両辺を x で微分すれば $\dfrac{1}{\cos^2 y}\dfrac{dy}{dx} = 1$ が得られる．ここで $\dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ を上式に代入してから両辺を $1 + x^2$ で割れば

$$(\tan^{-1} x)' \left(= \frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

であることがわかる．ゆえに $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x^2}$ であるので，結果として

$$f'(\sqrt{3}) = 1 + \frac{1}{1+(\sqrt{3})^2} = \frac{5}{4}$$

が得られる．よって $\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは ③ である．

問 2　次の 2 つの極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-7x^2+15x-9}=\boxed{\mathbf{3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\boxed{\mathbf{4}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ ・ $\boxed{\mathbf{4}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 6
	⑤ $\dfrac{1}{2}$	⑥ $\dfrac{1}{3}$	⑦ $\dfrac{2}{3}$	⑧ $\dfrac{1}{6}$
	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3	ⓒ -6
	ⓓ $-\dfrac{1}{2}$	ⓔ $-\dfrac{1}{3}$	ⓕ $-\dfrac{2}{3}$	ⓖ $-\dfrac{1}{6}$

解説

まず $\boxed{\mathbf{3}}$ について，$x=3$ を代入すると分子も分母も 0 となる．よって分子の多項式も分母の多項式も $(x-3)$ で割り切れることがわかる．それぞれ計算すると

$$x^3-5x^2+3x+9=(x-3)(x^2-3x-2),\qquad x^3-7x^2+15x-9=(x-3)(x^2-4x+3)$$

となる．さらにそれぞれの 2 次多項式も因数分解でき，結果として

$$x^3-5x^2+3x+9=(x-3)^2(x+1),\qquad x^3-7x^2+15x-9=(x-3)^2(x-1)$$

を得る．よって

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-7x^2+15x-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2(x+1)}{(x-3)^2(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-1}=2$$

となり，$\boxed{\mathbf{3}}$ の答えは ② である．別解として，ロピタルの定理を 3 回用いて

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x^2+3x+9}{x^3-7x^2+15x-9}=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-10x+3}{3x^2-14x+15}=\lim_{x\to 3}\frac{6x-10}{6x-14}=\frac{18-10}{18-14}=2$$

としてもよい．

次に $\boxed{\mathbf{4}}$ について，$y = \tan x$ および $y = \sin x$ の $x = 0$ におけるテイラー展開（マクローリン展開）はそれぞれ

$$\begin{cases} \tan x = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \cdots \\ \sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \cdots \end{cases}$$

であるので，これを用いて

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \cdots\right) - \left(x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \cdots\right)}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3!}\right)x^3 + \left(\dfrac{2}{15} - \dfrac{1}{5!}\right)x^5 + \cdots}{x^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \left\{\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{5!}\right)x^2 + \cdots\right\} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と計算できる．よって $\boxed{\mathbf{4}}$ の答えは ⑤ である．

ただ $\tan x$ のマクローリン展開は

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!}x^{2n-1} \qquad (B_n \text{ はベルヌーイ数})$$

のように $\sin x$ や $\cos x$ に比べて高次の係数の表現が複雑である．また問題の極限を求めるためには $f(x) = \tan x$ のマクローリン展開の 3 次まで係数を求めればよいが，そのためには $\tan x$ を 3 回微分する必要があり，若干の計算量がある．そこで $\tan x$ のマクローリン展開を用いずに極限を求める別解を紹介する．

極限の式を

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}\right)$$

のように変形する．ここで $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ であり，また $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1$ であるので，あとは $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ を求めればよい．あとはロピタルの定理により

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

を得る．

問 3　xyz 空間において，$z = x^y$ $(x > 0)$ で与えられる曲面を S とする．S 上の点 A(1, 3, 1) において，曲面 S に接する平面 T は，方程式

$$z - 1 = \boxed{\mathbf{5}}\,(x-1) + \boxed{\mathbf{6}}\,(y-3)$$

で与えられる．

$\boxed{5}$ ・ $\boxed{6}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ $\log 3$　⑦ $2\log 3$　⑧ $3\log 3$　⑨ $4\log 3$　ⓐ $5\log 3$

解説

方程式 $z = f(x,y)$ が表す曲面上において，点 $(a, b, f(a,b))$ での接平面は

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

で与えられる．よって $f(x,y) = x^y$ および点 A $(1,3,1)$ の場合に考えると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \log x$$

であることから

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = 0$$

となる．よって接平面 T の方程式は

$$z - 1 = 3(x-1) + 0(y-3) \quad (\Leftrightarrow \ z = 3x - 2)$$

となり，$\boxed{\mathbf{5}}$，$\boxed{\mathbf{6}}$ の答えはそれぞれ ③，⓪ である．

問 4　xy 平面上の 3 点 O$(0,0)$, A$(\pi,0)$, B(π,π) を頂点とする △OAB およびその内部を集合 D とするとき，重積分

$$\iint_D x\cos(x+y)\,dxdy$$

の値を求める．

集合 D は

$$D=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ 0 \leqq x \leqq \boxed{\mathbf{7}}\ ,\ \boxed{\mathbf{8}} \leqq y \leqq \boxed{\mathbf{9}}\ \right\}$$

と表されるので

$$\begin{aligned}\iint_D x\cos(x+y)dxdy &= \int_0^{\boxed{7}}\left(\int_{\boxed{8}}^{\boxed{9}} x\cos(x+y)dy\right)dx\\ &= \int_0^{\boxed{7}} \boxed{\mathbf{10}}\ dx = \boxed{\mathbf{11}}\end{aligned}$$

である．

$\boxed{7}$ 〜 $\boxed{9}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{\pi}{2}$	③ $-\dfrac{\pi}{2}$	④ π	⑤ $-\pi$
⑥ x	⑦ $-x$	⑧ y	⑨ $-y$	ⓐ $x+y$	ⓑ $x-y$

$\boxed{10}$ の解答群

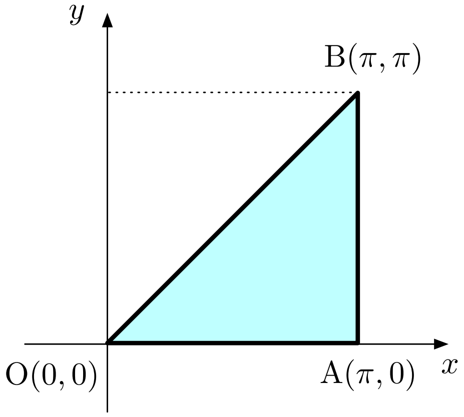
⓪ $x+x\cos x$	① $x-x\cos x$
② $x+x\sin x$	③ $x-x\sin x$
④ $x\cos x-x\cos 2x$	⑤ $-x\cos x+x\cos 2x$
⑥ $x\sin x-x\sin 2x$	⑦ $-x\sin x+x\sin 2x$

$\boxed{11}$ の解答群

⓪ 0	① $\dfrac{\pi}{2}$	② $-\dfrac{\pi}{2}$	③ π	④ $-\pi$
	⑤ $\dfrac{3}{2}\pi$	⑥ $-\dfrac{3}{2}\pi$	⑦ 2π	⑧ -2π

解説

集合 D を図示すると以下のようになる．



これを不等号で表せば

$$D = \{\,(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq \pi,\ 0 \leqq y \leqq x\}$$

のようになる．よってそれぞれ $\boxed{\mathbf{7}}$ の答えは ④，$\boxed{\mathbf{8}}$ の答えは ⓪，$\boxed{\mathbf{9}}$ の答えは ⑥ である．

積分計算について，被積分関数 $f(x, y) = x\cos(x+y)$ の形を見れば，まず x に関してではなく y に関して 0 から x まで積分を計算する方が楽であろう事が見て取れる．実際に計算を進めると

$$\begin{aligned}
\iint_D x\cos(x+y)dxdy &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^{x} x\cos(x+y)dy\right)dx \\
&= \int_0^{\pi}\Big[x\sin(x+y)\Big]_{y=0}^{y=x} dx \\
&= \int_0^{\pi} x(\sin 2x - \sin x)dx \\
&= \left[x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x\right)\right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x\right)dx \\
&= -\frac{3}{2}\pi - \left[-\frac{1}{4}\sin 2x + \sin x\right]_{x=0}^{x=\pi} \\
&= -\frac{3}{2}\pi
\end{aligned}$$

となる．したがって $\boxed{\mathbf{10}}$ の答えは ⑦，$\boxed{\mathbf{11}}$ の答えは ⑥ である．

この問題のように，重積分の計算においては「x に関して先に積分をする場合」と「y に関して先に積分する場合」とで計算の困難さが大きく異なる場合があるので，注意する

必要がある．例えば $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ の 3 点を頂点とする三角形を積分領域 D とするときの重積分

$$\int_D e^{x^2}dxdy$$

を考えてみよう．不定積分 $\int e^{x^2}dx$ は初等関数で表現できない事が知られているので，この重積分を x から処理しようとすると計算に行き詰まる．この場合は D を

$$D = \{\,(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\}$$

のように表し，y から先に積分計算をするとうまくいく（各自計算してみて欲しい）．結果として，積分の答えは

$$\int_D e^{x^2}dxdy = \frac{1}{2}(e-1)$$

となる．

問 5　極座標 r, θ により

$$r = \frac{1}{1+\cos\theta} \quad (-\pi < \theta < \pi)$$

で表される平面上の曲線を C とする．直交座標に関する C の方程式を求めるために $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおけば，点 $\mathrm{P}(x, y)$ が C 上にあるとき $\boxed{\mathbf{12}}$ が成り立つ．したがって，曲線 C は $\boxed{\mathbf{13}}$ である．また，C の $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する部分の長さ L は

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \boxed{\mathbf{14}}\, d\theta$$

と表される．この積分値を求めるために $t = \sin\dfrac{\theta}{2}$ とおき，置換積分を行うと

$$L = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1-t^2)^2}\, dt$$

となる．ここで

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \boxed{\mathbf{15}}$$

であるから，$L = \boxed{\mathbf{16}}$ となる．

$\boxed{\mathbf{12}}$ ・ $\boxed{\mathbf{13}}$ の解答群

⓪ $4xy = 1$	① $xy = 4$	② $4x^2 + y^2 = 1$
③ $x^2 + 4y^2 = 1$	④ $2x - y^2 = 1$	⑤ $2x + y^2 = 1$
⑥ $x^2 - 2y = -1$	⑦ $x^2 + 2y = 1$	⑧ 楕円
⑨ 放物線	ⓐ 双曲線	ⓑ 懸垂線

$\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ $1 + \cos\theta$	① $(1+\cos\theta)^2$	② $\sqrt{2}(1+\cos\theta)^2$
③ $\dfrac{1}{1+\cos\theta}$	④ $\dfrac{1}{(1+\cos\theta)^2}$	⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\cos\theta)^2}$
⑥ $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\cos\theta}$	⑦ $\dfrac{\sqrt{2}}{(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$	⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{2}(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$

$\boxed{15}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-t)^2}+\dfrac{1}{(1+t)^2}\right)$

① $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-t)^2}-\dfrac{1}{(1+t)^2}\right)$

② $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-t)^2}+\dfrac{1}{(1+t)^2}+\dfrac{1}{1-t}\right)$

③ $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-t)^2}-\dfrac{1}{(1+t)^2}+\dfrac{1}{1+t}\right)$

④ $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-t)^2}+\dfrac{1}{(1+t)^2}+\dfrac{1}{1-t}+\dfrac{1}{1+t}\right)$

⑤ $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-t)^2}-\dfrac{1}{(1+t)^2}+\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{1}{1+t}\right)$

$\boxed{16}$ **の解答群**

⓪ $\sqrt{2}$　① $\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}-1)$　② $\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}+1)$

③ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　④ $\sqrt{2}+\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$　⑤ $\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

解説

いま $r=1/(1+\cos\theta)$ であるので，$P(x,y)$ の x 座標と y 座標はそれぞれ

$$x=r\cos\theta=\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta},\qquad y=r\sin\theta=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

と計算される．これより

$$\cos\theta=\frac{x}{1-x},\qquad \sin\theta=\frac{y}{1-x}$$

となる．$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に上式を代入して x と y の関係式を求めれば

$$2x+y^2=1$$

となり，したがって C は放物線である．よって $\boxed{\textbf{12}}$ の答えは ⑤ であり， $\boxed{\textbf{13}}$ の答えは ⑨ である．

次に，$-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ に対応する C の部分の長さを L とおくと

$$\begin{aligned}
L &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{(1+\cos\theta)^2} + \frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^4}}\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta
\end{aligned}$$

となる．よって $\boxed{\textbf{14}}$ の答えは ⑦ である．

積分計算を進める前に，$\dfrac{1}{(1-t^2)^2}$ の部分分数分解を計算しておこう．いま

$$\frac{2}{(1+t)(1-t)} = \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}$$

であることを用いれば

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-t^2)^2} &= \left\{\frac{1}{(1+t)(1-t)}\right\}^2 \\
&= \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)\right\}^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{2}{(1+t)(1-t)}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)
\end{aligned}$$

となる．よって $\boxed{\textbf{15}}$ の答えは ④ である．

さて，問題に沿って $t = \sin\dfrac{\theta}{2}$ とおくと，θ が $-\dfrac{\pi}{2}$ から $\dfrac{\pi}{2}$ を動くとき，t は $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を動く．また

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}$$

であり

$$1+\cos\theta = 1+1-2\sin^2\frac{\theta}{2} = 2(1-t^2)$$

であるから

$$\begin{aligned}
L =& \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dt}{(1-t^2)^2} \\
=& \frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right\} dt \\
=& \frac{1}{4}\left[\frac{2t}{1-t^2}+\log\frac{1+t}{1-t}\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}
\end{aligned}$$

となる．よって $\boxed{\textbf{16}}$ の答えは ⑤ である．

他に $s=\tan\dfrac{\theta}{2}$ と置換し計算することもできる．この場合は s は -1 から 1 までを動き，また $d\theta = \dfrac{2}{1+s^2}$, $1+\cos\theta = \dfrac{2}{1+s^2}$ であることから

$$L = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+s^2} = \frac{1}{2}\left[s\sqrt{1+s^2}+\log(s+\sqrt{1+s^2})\right]_{-1}^{1} = \sqrt{2}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

となる．

第2分野　線形代数

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{17}}$ 〜 $\boxed{\textbf{34}}$ 〕

問 1　(1)　$\mathbb{R}^3$ の原点を O とし，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ をその正規直交基底とする．ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{e}_1 + 2\,\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \qquad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$$

によって作られる $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は $\boxed{\textbf{17}}$ である．

$\boxed{\textbf{17}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ $\dfrac{1}{2}$	⑧ $\dfrac{3}{2}$	⑨ $\dfrac{5}{2}$	ⓐ $\sqrt{2}$	ⓑ $\sqrt{3}$
ⓒ $\sqrt{6}$	ⓓ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	ⓔ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	ⓕ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$		

(2)　行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{\textbf{18}}$ である．

$\boxed{\textbf{18}}$ **の解答群**

⓪ 0						
① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6	⑦ 7
⑧ -1	⑨ -2	ⓐ -3	ⓑ -4	ⓒ -5	ⓓ -6	ⓔ -7

(3)　行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列 A^{-1} の $(1,1)$ 成分は $\boxed{\mathbf{19}}$ であり，

$(3,2)$ 成分は $\boxed{\mathbf{20}}$ である．

$\boxed{\mathbf{19}}$・$\boxed{\mathbf{20}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 6　⑤ $\dfrac{1}{2}$　⑥ $\dfrac{1}{3}$　⑦ $\dfrac{1}{6}$

⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3　ⓑ -6　ⓒ $-\dfrac{1}{2}$　ⓓ $-\dfrac{1}{3}$　ⓔ $-\dfrac{1}{6}$

解説

(1)　$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ が正規直交基底なので

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

が成り立つ．すると，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} &= (\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3) \cdot (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) \\ &= \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

となり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は直交している．また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の長さ（ノルム）はそれぞれ

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| &= \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}}} = \sqrt{(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3) \cdot (\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3)} \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| &= \sqrt{\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}} = \sqrt{(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) \cdot (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3)} \\ &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

である．よって，三角形 △OAB の面積は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \frac{1}{2}\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \sqrt{3}$$

したがって， $\boxed{\mathbf{17}}$ の答えは ⓑ である．

(2) 行列式の変形をおこない計算する．以下に計算例を示す．

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l}\text{第 2 行に第 1 行の } (-2) \text{ 倍} \\ \text{を加える．この操作で行列} \\ \text{式の値は変わらない．}\end{array}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l}\text{第 4 行に第 3 行の } (-1) \text{ 倍} \\ \text{を加える．この操作で行列} \\ \text{式の値は変わらない．}\end{array}\right)$$

$$= \quad 1\cdot(-5)\cdot(-1)\cdot 1 = 5 \quad \left(\begin{array}{l}\text{上三角行列の行列式の値は} \\ \text{対角成分の積に等しい．}\end{array}\right)$$

よって， $\boxed{\mathbf{18}}$ の答えは ⑤ である．別解として，ブロック行列 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$ $(A, B, D$： n 次正方行列）に対して $\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A|\cdot|D|$ が成り立つことを利用して求めてもよい．

(3) A の逆行列の成分は A の行列式の値と余因子を使って求められる．まずサラスの公式から， A の行列式の値は

$$|A| = 1\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 2\cdot 1 = -1$$

である． A の (i,j)-余因子を $\hat{A}_{ij}$ と書くことにする． $\hat{A}_{ij}$ は A から第 i 行と第 j 列を取り除いた行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ 倍した値である．余因子の性質により逆行列 A^{-1} の (i,j) 成分は $\hat{A}_{ji}/|A|$ で計算される．（$\hat{A}_{ij}$ でなく $\hat{A}_{ji}$ であることに注意する）

$$\hat{A}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

であるから，A^{-1} の $(1,1)$ 成分は -3 である．したがって， $\boxed{\textbf{19}}$ の答えは ⓐ である．次に

$$\hat{A}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

であるから，A^{-1} の $(3,2)$ 成分は 0 である．したがって， $\boxed{\textbf{20}}$ の答えは ⓪ である．別解として，行列 A の逆行列そのものを掃き出し法で計算してもよい．

問 2 行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし，} a \text{ は定数})$$

について考える．

(1) AB の行列式 $|AB|$ の値が 0 となるのは $a =$ $\boxed{\mathbf{21}}$ のときである．

(2) B の各列を順に $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ とおくと $B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3)$ であり，$AB = (A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ A\boldsymbol{b}_3)$ である．

さて，$a \neq$ $\boxed{\mathbf{21}}$ のときは，ベクトル $A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{b}_3$ は $\mathbb{R}^3$ において $\boxed{\mathbf{22}}$.
一方，$a =$ $\boxed{\mathbf{21}}$ のときは

$$A\,\boldsymbol{b}_1 = c\,A\boldsymbol{b}_2 + A\boldsymbol{b}_3$$

が成り立つ．ここで $c =$ $\boxed{\mathbf{23}}$ である．

$\boxed{21}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

$\boxed{22}$ の解答群

⓪ 1 次独立（線形独立）である　① 1 次従属（線形従属）である

$\boxed{23}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{1}{3}$　⑥ $\frac{2}{3}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ $-\frac{1}{2}$　ⓐ $-\frac{3}{2}$　ⓑ $-\frac{1}{3}$　ⓒ $-\frac{2}{3}$

解説

(1) 行列式の性質から $|AB| = |A||B|$ が成り立つ．A と B には 0 の成分がいくつかあるため，$|A|$, $|B|$ の行列式はサラスの公式を使って求めるのが有効である．

$$
\begin{aligned}
|A| &= 1\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot(-2) - 1\cdot 2\cdot(-2) - 1\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 0\cdot 0\\
&= 3\\
|B| &= a\cdot 2\cdot 0 + 0\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot(-1)\cdot(-1) - a\cdot 3\cdot(-1) - 0\cdot(-1)\cdot 0 - 1\cdot 2\cdot 2\\
&= 3(a-1)
\end{aligned}
$$

したがって，$|A||B| = 3\cdot 3(a-1) = 9(a-1) = 0$ という方程式が成り立つので，これを解けば $a = 1$ となる．したがって，$\boxed{\mathbf{21}}$ の答えは ① である．

(2) 一般に k 個の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立（線形独立）であるとは，未知数 $c_1, c_2, \ldots, c_k$ に関する連立 1 次方程式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$$

の解が自明な解 $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ のみとなることである．また，これ以外の解を持つとき 1 次従属（線形従属）であるという．$k = n$ のとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が 1 次独立（線形独立）であるかどうかを判別する方法として，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ を横に並べてできる n 次正方行列 $X = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_k)$ の行列式の値を調べる方法がある．

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \text{ が 1 次独立} \quad \Leftrightarrow \quad |X| \neq 0\\
&\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \text{ が 1 次従属} \quad \Leftrightarrow \quad |X| = 0
\end{aligned}
$$

今回は $n = 3$ でこの方法を使うのが有効である．(1) の結果から，$a \neq 1$ のとき $|AB| \neq 0$ となる．さらに $AB = (A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ A\boldsymbol{b}_3)$ であるから，ベクトル $A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{b}_3$ は 1 次独立となる．したがって，$\boxed{\mathbf{22}}$ の答えは ⓪ である．

次に，$a = 1$ のとき，上記の議論から $A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, A\boldsymbol{b}_3$ は 1 次従属となる．問題文から

$$A\boldsymbol{b}_1 = cA\boldsymbol{b}_2 + A\boldsymbol{b}_3 \tag{$*$}$$

が成り立つのでこのまま各ベクトルを計算して c を求めることもできるが，より効率的な計算方法として以下がある．(1) の結果から $|A| \neq 0$ なので A は正則行列である．したがって，$(*)$ の両辺に左側から A^{-1} を掛けると

$$\boldsymbol{b}_1 = c\,\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$$

が成り立つ．よって，$\boldsymbol{b}_1 = {}^t(1\ \ -1\ 2), \boldsymbol{b}_2 = {}^t(0\ 2\ \ -1), \boldsymbol{b}_3 = {}^t(1\ 3\ 0)$ より

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2c \\ -c \end{pmatrix} = c\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

すなわち， $c = -2$ である．したがって， $\boxed{\mathbf{23}}$ の答えは ⑧ である．

問 3 ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ から得られる行列 $A = \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b}$ について考える．

ただし ${}^t\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{b}$ の転置，すなわち ${}^t\boldsymbol{b} = (2 \ \ -2 \ \ 3)$ を表す．

(1) 行列 A の階数（ランク）は $\boxed{\textbf{24}}$ である．

$\boxed{\textbf{24}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

(2) 集合 $V = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ は $\boxed{\textbf{25}}$．ただし，$\boldsymbol{0}$ は $\mathbb{R}^3$ の零ベクトルとする．

(3) 集合 $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \right\}$ は $\boxed{\textbf{26}}$．

$\boxed{\textbf{25}}$ ・ $\boxed{\textbf{26}}$ **の解答群**

⓪ $\mathbb{R}^3$ の 0 次元ベクトル部分空間である

① $\mathbb{R}^3$ の 1 次元ベクトル部分空間である

② $\mathbb{R}^3$ の 2 次元ベクトル部分空間である

③ $\mathbb{R}^3$ の 3 次元ベクトル部分空間である

④ $\mathbb{R}^3$ のベクトル部分空間ではない

解説

(1) 行列の階数（ランク）とは，行列を階段行列へと行基本変形したとき，その行列の非零となる行ベクトルの個数のことである．

まず $A = \boldsymbol{a}\,{}^t\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 12 & -12 & 18 \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ の行基本変形を行うと

$$A \xrightarrow{\text{第 1 行}\leftrightarrow\text{第 2 行}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 12 & -12 & 18 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行}+\text{第 1 行}\times(-2)]{\text{第 2 行}+\text{第 1 行}\times(-6)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，非零となる行ベクトルは 1 個なので $\operatorname{rank} A = 1$ となる．つまり，$\boxed{\mathbf{24}}$ の答えは ① である．

(2) n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S がベクトル部分空間とは，S がベクトルの和とスカラー倍という 2 つの演算に関して閉じているときにいう．すなわち，以下が成り立つ．

(a) 任意の S の元 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して，$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ は S の元となる;
(b) 任意の S の元 $\boldsymbol{v}$ および任意の実数（スカラー） c に対して，$c\boldsymbol{v}$ は S の元となる．

ベクトル部分空間 S には，1 次独立な S 内のベクトルの組で，S 内の任意のベクトルがこの組のベクトル達の 1 次結合で表せるものが存在する．この組を S の基底とよび，ベクトルの個数 k を S の次元という．基底は S に対して複数存在するが，次元の値はそれらの基底の選び方によらず一意的に定まる．またこのとき，S を $\mathbb{R}^n$ の k 次元ベクトル部分空間という．

まず，集合 V が $\mathbb{R}^3$ のベクトル部分空間となるかを考える．V の定義から，V に属するベクトル $\boldsymbol{x}$ は連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解となる．任意の V の元 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ および任意の実数 c に対して

$$A(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \quad \text{かつ} \quad A(c\boldsymbol{v}) = c(A\boldsymbol{v}) = c\cdot\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．よって和 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ とスカラー倍 $c\boldsymbol{v}$ は再び V に属するので，V は $\mathbb{R}^3$ のベクトル部分空間となる．なお，V を連立一次方程式の解空間という．

次に，(1) での行基本変形によってこの方程式の解は変わらないので，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とおくと

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．したがって，s, t を任意定数とすると，この方程式の解は

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} s - \frac{3}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

と表せる．よって，ベクトルの組 $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ は V の基底となり，その次元は 2 となる．したがって，$\boxed{\textbf{25}}$ の答えは ② である．

※一般に，$m \times n$ 行列 A に関する連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間の次元は $n - \mathrm{rank}(A)$ となる．

(3) (2) と同様に集合 W がベクトル部分空間になるかを考える．W 内の零ベクトルでない 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対して

$$A(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{w} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{a}$$

が成り立つ．$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ なので，和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ は連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ の解とはならない．すなわち，$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ は W の元ではないので，W は $\mathbb{R}^3$ のベクトル部分空間ではない．したがって，$\boxed{\textbf{26}}$ の答えは ④ である．

問 4　$\mathbb{R}^3$ において，1 次独立（線形独立）なベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

について考える．また，$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積を $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ とし，$\boldsymbol{x}$ の長さを $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ とする．ただし ${}^t\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の転置を表す．

(1)　$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ のなす角の大きさは $\boxed{\textbf{27}}$ である．

(2)　$\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|}, \boldsymbol{u}_2 = \dfrac{\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_2|}$ と定める．また

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\,\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \boxed{\textbf{28}} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおき，$\boldsymbol{u}_3 = \dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$ と定めると，$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底となる．

(3)　$U = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3)$ と定めると，U は 3 次正則行列となり，その逆行列は ${}^tU$ に等しいことがわかる．このことから，$U\boldsymbol{a}_1$ と $U\boldsymbol{a}_2$ の内積は $\boxed{\textbf{29}}$ となる．したがって，$U\boldsymbol{a}_1$ と $U\boldsymbol{a}_2$ のなす角の大きさは $\boxed{\textbf{30}}$ である．

$\boxed{\textbf{27}}$ ・ $\boxed{\textbf{30}}$ の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{\pi}{6}$　② $\dfrac{\pi}{4}$　③ $\dfrac{\pi}{3}$　④ $\dfrac{\pi}{2}$

⑤ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑥ $\dfrac{3}{4}\pi$　⑦ $\dfrac{5}{6}\pi$　⑧ π

$\boxed{\textbf{28}}$ ・ $\boxed{\textbf{29}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

解説

(1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ のなす角の大きさを θ とおくと $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|}$ が成り立つ．$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2$, $|\boldsymbol{a}_1|$, $|\boldsymbol{a}_2|$ をそれぞれ計算すると

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0,$$

$$|\boldsymbol{a}_1| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3, \qquad |\boldsymbol{a}_2| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

となる．この結果から $\cos\theta = 0$ となり，いま $0 \leq \theta \leq \pi$ なので $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ である．よって，$\boxed{\textbf{27}}$ の答えは ④ である．

(2) $\mathbb{R}^3$ の基底 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ が正規直交基底であるとは，$i, j = 1, 2, 3$ に対して

$$\boldsymbol{x}_i \cdot \boldsymbol{x}_j = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

が成り立つことである．つまり，各 ベクトルの長さは 1 であり，かつ異なる 2 つのベクトルは互いに直交している．$\mathbb{R}^3$ の 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3$ に対して

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{y}_1, \qquad \boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{z}_1}{|\boldsymbol{z}_1|}$$

$$\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{y}_2 - (\boldsymbol{y}_2 \cdot \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \frac{\boldsymbol{z}_2}{|\boldsymbol{z}_2|}$$

$$\boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{y}_3 - (\boldsymbol{y}_3 \cdot \boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{x}_1 - (\boldsymbol{y}_3 \cdot \boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{x}_2, \qquad \boldsymbol{x}_3 = \frac{\boldsymbol{z}_3}{|\boldsymbol{z}_3|}$$

と定めると，$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ は正規直交基底となる．この構成法をグラム・シュミットの正規直交化法とよぶ．本問はこの方法を用いて $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ の正規直交化を行っている．以下，問題の表記の通りに $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を求める．

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{|\boldsymbol{a}_1|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 - (\boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって，$\boxed{\textbf{28}}$ の答えは ④ である．

(3) 本問は直接 $U\boldsymbol{a}_1$ と $U\boldsymbol{a}_2$ を求めてそれらの内積およびなす角の大きさを計算することもできるが，より効率的に求める方法がある．一般に $A{}^tA = {}^tAA = E$（E は単位行列）を満たす行列 A を直交行列という．言い換えれば A の逆行列は ${}^tA$ となる．正規直交基底の定義から U は直交行列になることがわかる．${}^t(U\boldsymbol{a}_1) = {}^t\boldsymbol{a}_1{}^tU$ となることに注意すれば

$$\begin{aligned}(U\boldsymbol{a}_1)\cdot(U\boldsymbol{a}_2) = {}^t(U\boldsymbol{a}_1)(U\boldsymbol{a}_2) &= ({}^t\boldsymbol{a}_1{}^tU)(U\boldsymbol{a}_2)\\ &= {}^t\boldsymbol{a}_1({}^tUU)\boldsymbol{a}_2 = {}^t\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2 = 0\end{aligned}$$

が成り立つ．すなわち，$U\boldsymbol{a}_1$ と $U\boldsymbol{a}_2$ の内積は 0 であり，それらのなす角の大きさは $\dfrac{\pi}{2}$ となる．したがって，$\boxed{\mathbf{29}}$ の答えは ⓪，$\boxed{\mathbf{30}}$ の答えは ④ である．

一般に，直交行列 A に対して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{x}$ は $\mathbb{R}^3$ の元) という線形変換 $f(\boldsymbol{x})$ を直交変換という．本問の議論からわかるように，この変換は $\mathbb{R}^3$ の任意の 2 つのベクトルの内積の値を変えない．同様に，$f(\boldsymbol{x})$ は $\mathbb{R}^3$ の任意のベクトルの長さを変えないこともわかる．大切な線形変換の 1 つなので覚えておこう．

問 5 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ a & -1 & 2 \\ b & -5 & 5 \end{pmatrix} \qquad (\text{ただし，} a, b \text{ は定数})$$

の固有値が 1, 2, 3 であるとする．

(1) このとき $a = \boxed{\textbf{31}}$，$b = \boxed{\textbf{32}}$ である．

(2) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\textbf{33}} \\ 3 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に対応する固有ベクトルである．この $\boldsymbol{x}$ に対して

$$(A^2 - 3A)\,\boldsymbol{x} = \boxed{\textbf{34}}\ \boldsymbol{x}$$

が成り立つ．

$\boxed{\textbf{31}}$ 〜 $\boxed{\textbf{34}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8

⑨ −1　ⓐ −2　ⓑ −3　ⓒ −4　ⓓ −5　ⓔ −6　ⓕ −7　ⓖ −8

解説

(1) n 次正方行列 A において

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \tag{$*$}$$

を満たすスカラー λ を A の固有値，n 次元列ベクトル $\boldsymbol{x}$ を λ に対応する固有ベクトルという．固有値と固有ベクトルを求めるためには $(*)$ を書き換えた

$$(\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{$**$}$$

を満たす λ と $\boldsymbol{x}$ $(\neq \boldsymbol{0})$ を求めればよい．ここで E は n 次単位行列である．$(**)$ で表される同次連立方程式が自明でない解をもつことから

$$|\lambda E - A| = 0$$

を満たす λ が A の固有値である．この問題では

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ a & -1 & 2 \\ b & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

であるので，サラスの公式から

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 3 & -2 \\ -a & \lambda + 1 & -2 \\ -b & 5 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-5) + 6b + 10a - 2b(\lambda+1) + 3a(\lambda-5) + 10(\lambda-2) \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + (3a - 2b + 13)\lambda - 5a + 4b - 10 \end{aligned}$$

である．一方，A の固有値が $1, 2, 3$ であることがわかっているので

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

にならなければならない．したがって，次の連立方程式が成り立つ．

$$\begin{cases} 3a - 2b + 13 &= 11 \\ -5a + 4b - 10 &= -6 \end{cases}$$

これらを解いて $a = 0,\ b = 1$ を得る．したがって，$\boxed{\mathbf{31}}$，$\boxed{\mathbf{32}}$ の答えは順に ⓪，① となる．別解として，固有方程式 $|\lambda E - A| = 0$ に $\lambda = 1, 2, 3$ をそれぞれ代入して得られる式より a, b を求めることもできる．

(2) 問題文から $A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ となる $\boldsymbol{x}$ を求めればよい．$\boxed{\mathbf{33}}$ に入る値を y とおくと

$$(2E - A)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．この式から $3y - 6 = 0$ より $y = 2$ となる．したがって，$\boxed{\mathbf{33}}$ の答えは ② である．次に $A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{x}$ を用いると

$$(A^2 - 3A)\boldsymbol{x} = A^2\boldsymbol{x} - 3A\boldsymbol{x} = A(A\boldsymbol{x}) - 3A\boldsymbol{x} = A(2\boldsymbol{x}) - 3(2\boldsymbol{x}) = 4\boldsymbol{x} - 6\boldsymbol{x} = -2\boldsymbol{x}$$

が得られる．したがって，$\boxed{\mathbf{34}}$ の答えは ⓐ である．

第３分野　常微分方程式

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{35}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{51}}$ 〕

(注意)　各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．また，特殊解は特解ともいう．

問 1　微分方程式

$$(*)\qquad y' + 2y = 6\cos 2x - 2\sin 2x$$

を解く．

(1)　対応する同次方程式

$$y' + 2y = 0$$

の一般解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{35}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{35}}$ の解答群

⓪ $x + C$　① $2x + C$　② Ce^{x}　③ Ce^{-x}　④ Cxe^{x}

⑤ Cxe^{-x}　⑥ Ce^{2x}　⑦ Ce^{-2x}　⑧ Cxe^{2x}　⑨ Cxe^{-2x}

(C は任意定数)

(2)　$(*)$ の特殊解を

$$y_s(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$$

とおくと

$$a = \boxed{\mathbf{36}},\quad b = \boxed{\mathbf{37}}$$

である．よって，$(*)$ の一般解は $y(x) = \boxed{\mathbf{35}} + y_s(x)$ である．

36 ・ **37** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 6
	⑥ −1	⑦ −2	⑧ −3	⑨ −4	ⓐ −6

解説

(1) 対応する同次方程式は変数分離法である．

$$\frac{y'}{y} = -2$$

と変形して両辺を x で積分すると

$$\log|y| = -2x + C_1$$

となり，したがって

$$y = \pm e^{C_1} e^{-2x}$$

を得る．ただし C_1 は任意定数である．ここで $C = \pm e^{C_1}$ とおけば，対応する同次方程式の一般解

$$y = Ce^{-2x}$$

が得られ，$\boxed{\mathbf{35}}$ の答えは ⑦ となる．

(2) $(*)$ の特殊解

$$y_s(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$$

を微分方程式に代入すると

$$y_s' + 2y_s = (2a+2b)\cos 2x + (-2a+2b)\sin 2x = 6\cos 2x - 2\sin 2x$$

なので

$$2a + 2b = 6, \quad -2a + 2b = -2$$

である．これを a, b について解けば

$$a = 2, \quad b = 1$$

であるから，$\boxed{\mathbf{36}}$，$\boxed{\mathbf{37}}$ の答えは順に ②, ① となる．

問 2　微分方程式

$$(*)\qquad y' + \frac{1}{x}y = 2\log x$$

を $x > 0$ の範囲で考える．

(1)　対応する同次方程式

$$y' + \frac{1}{x}y = 0$$

の一般解は

$$(**)\qquad y(x) = C\,\boxed{\mathbf{38}}\qquad (C \text{ は任意定数})$$

である．

$\boxed{\mathbf{38}}$ **の解答群**

⓪ $\frac{1}{x}$	① $\frac{1}{x^2}$	② $\frac{1}{x^3}$	③ $\frac{1}{x^4}$
④ $x+1$	⑤ x^2+1	⑥ x^3+1	⑦ x^4+1
⑧ e^x	⑨ e^{-x}	ⓐ $e^{\frac{1}{x}}$	ⓑ $e^{-\frac{1}{x}}$
ⓒ $\log x$	ⓓ $-\log x$	ⓔ $2\log x$	ⓕ $-2\log x$

(2)　$(**)$ において，C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて，$y = u(x)\cdot\boxed{\mathbf{38}}$ を $(*)$ に代入すると

$$\frac{du}{dx} = \boxed{\mathbf{39}}$$

が得られる．この方程式の一般解 $u(x)$ を求めることにより，$(*)$ の一般解

$$y(x) = \boxed{\mathbf{40}}$$

が得られる．

$\boxed{\mathbf{39}}$ **の解答群**

⓪ $\log x$　① $\dfrac{1}{\log(x+1)}$　② $2\log x$

③ $x\log x$　④ $\dfrac{2x}{\log(x+1)}$　⑤ $2x\log x$

⑥ $x\log x + x$　⑦ $x\log x - x$

$\boxed{\mathbf{40}}$ **の解答群**

⓪ $x\log x + \tilde{C}$　① $2x\log x + \tilde{C}$

② $2x\log x - x + \dfrac{\tilde{C}}{x}$　③ $x\log x - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\tilde{C}}{x}$

④ $-x\log x + \tilde{C}$　⑤ $-2x\log x + \tilde{C}$

⑥ $-2x\log x + x + \dfrac{\tilde{C}}{x}$　⑦ $-x\log x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\tilde{C}}{x}$

($\tilde{C}$ は任意定数)

解説

(1) 対応する同次方程式は変数分離形である．

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

と変形して両辺を x で積分すると

$$\log|y| = -\log|x| + C_1$$

となるので，したがって

$$y = \pm\frac{e^{C_1}}{x}$$

を得る．ただし C_1 は任意定数である．ここで $C = \pm e^{C_1}$ とおけば，対応する同次方程式の一般解

$$y = \frac{C}{x}$$

が得られ， $\boxed{\mathbf{38}}$ の答えは ⓪ となる．

(2) 対応する同次方程式の一般解 $y = \dfrac{C}{x}$ において，C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて

$$y = \frac{u(x)}{x}$$

とすると

$$y' = -\frac{u}{x^2} + \frac{u'}{x}$$

なので，これらを $(*)$ に代入すると

$$\left(-\frac{u}{x^2} + \frac{u'}{x}\right) + \frac{u}{x^2} = 2\log x$$

すなわち

$$u' = 2x\log x$$

が得られる．この両辺を x で積分すると

$$u = x^2\log x - \frac{1}{2}x^2 + \tilde{C}$$

すなわち

$$y = \frac{u}{x} = x\log x - \frac{1}{2}x + \frac{\tilde{C}}{x}$$

が得られる．ただし $\tilde{C}$ は任意定数である．以上より，$\boxed{\textbf{39}}$，$\boxed{\textbf{40}}$ の答えは順に ⑤, ③ となる．

問 3　微分方程式

$$(*) \qquad y'' - 6y' + 10y = f(x)$$

を考える．

(1)　$f(x) = 0$ のとき，$(*)$ の一般解は $y(x) = \boxed{41}$ である．さらに初期条件 $y(0) = 0,\ y'(0) = 2$ を満たす解は $y(x) = \boxed{42}$ である．

$\boxed{41}$ の解答群

⓪ $x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$　① $x^3(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

② $e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$　③ $e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

④ $e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$　⑤ $e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$

⑥ $e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$　⑦ $e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$

⑧ $e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$　⑨ $e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

（$C_1,\ C_2$ は任意定数）

$\boxed{42}$ の解答群

⓪ $e^x \sin 3x$　① $e^x \cos 3x$　② $e^{-x} \sin 3x$　③ $e^{-x} \cos 3x$

④ $e^{3x} \sin x$　⑤ $e^{3x} \cos x$　⑥ $e^{-3x} \sin x$　⑦ $e^{-3x} \cos x$

⑧ $2e^x \sin 3x$　⑨ $2e^x \cos 3x$　ⓐ $2e^{-x} \sin 3x$　ⓑ $2e^{-x} \cos 3x$

ⓒ $2e^{3x} \sin x$　ⓓ $2e^{3x} \cos x$　ⓔ $2e^{-3x} \sin x$　ⓕ $2e^{-3x} \cos x$

(2) $f(x) = 10x^2 + 28x - 2$ のとき，定数 A, B, C を $A = \boxed{\textbf{43}}$, $B = \boxed{\textbf{44}}$, $C = \boxed{\textbf{45}}$ と定めると

$$y(x) = \boxed{\textbf{41}} + Ax^2 + Bx + C$$

は，$(*)$ の一般解になる．

$\boxed{43}$ 〜 $\boxed{45}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
	⑤ -1	⑥ -2	⑦ -3	⑧ -4
	⑨ $\dfrac{1}{3}$	ⓐ $\dfrac{2}{3}$	ⓑ $\dfrac{4}{3}$	ⓒ $\dfrac{5}{3}$
	ⓓ $-\dfrac{1}{3}$	ⓔ $-\dfrac{2}{3}$	ⓕ $-\dfrac{4}{3}$	ⓖ $-\dfrac{5}{3}$

解説

(1) $f(x) = 0$ のとき，$(*)$ は同次であり，特性方程式 $\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$ の解は $\lambda = 3 \pm i$ である．このとき，$(*)$ の一般解は

$$y = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

となる．この両辺を x で微分すると

$$y' = e^{3x}[(3C_1 + C_2)\cos x + (-C_1 + 3C_2)\sin x]$$

であるから，初期条件より

$$y(0) = C_1 = 0, \quad y'(0) = 3C_1 + C_2 = 2.$$

すると $C_1 = 0, C_2 = 2$ であるから，初期条件を満たす解は

$$y = 2e^{3x}\sin x$$

となる．以上より，$\boxed{\textbf{41}}$，$\boxed{\textbf{42}}$ の答えは順に ⑥, ⓒ となる．

(2) $f(x) = 10x^2 + 28x - 2$ のとき，関数 $y_p = Ax^2 + Bx + C$ が微分方程式 $(*)$ の特殊解となるように定数 A, B, C を定めればよい．

$$y_p' = 2Ax + B, \quad y_p'' = 2A$$

であり，これらを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} y_p'' - 6y_p' + 10y_p &= 2A - 6(2Ax + B) + 10(Ax^2 + Bx + C) \\ &= 10Ax^2 + (-12A + 10B)x + (2A - 6B + 10C) \\ &= 10x^2 + 28x - 2 \end{aligned}$$

となる．すると $A = 1$, $B = 4$, $C = 2$ であるから， $\boxed{\textbf{43}}$ 〜 $\boxed{\textbf{45}}$ の答えは順に①, ④, ② となる．

問 4　初期値問題

$$y'' + 4y' + by = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$$

の解 y について考える．ただし，b は定数である．

(1)　$b = \boxed{\mathbf{46}}$ のとき，$y = 2e^{-x} - 2e^{-3x}$ である．

(2)　$b = \boxed{\mathbf{47}}$ のとき，$y = 4xe^{-2x}$ である．

(3)　$b = \boxed{\mathbf{48}}$ のとき，$\lim_{x \to \infty} y(x) = 1$ である．

$\boxed{46}$ 〜 $\boxed{48}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ −1	⑦ −2	⑧ −3	⑨ −4	ⓐ −5

解説

(1)　関数 $y = 2e^{-x} - 2e^{-3x}$ に対して

$$y' = -2e^{-x} + 6e^{-3x}, \quad y'' = 2e^{-x} - 18e^{-3x}$$

であり，これが微分方程式の解であれば

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + by &= (2e^{-x} - 18e^{-3x}) + 4(-2e^{-x} + 6e^{-3x}) + b(2e^{-x} - 2e^{-3x}) \\ &= (2b - 6)e^{-x} + (-2b + 6)e^{-3x} = 0 \end{aligned}$$

を満たす．これは $b = 3$ のときであるから，$\boxed{\mathbf{46}}$ の答えは ③ となる．

(2)　関数 $y = 4xe^{-2x}$ に対して

$$y' = 4(-2x + 1)e^{-2x}, \quad y'' = 16(x - 1)e^{-2x}$$

であり，これが微分方程式の解であれば

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + by &= 16(x - 1)e^{-2x} + 4 \cdot 4(-2x + 1)e^{-2x} + b \cdot 4xe^{-2x} \\ &= (4b - 16)xe^{-2x} = 0 \end{aligned}$$

を満たす．これは $b = 4$ のときであるから，$\boxed{\mathbf{47}}$ の答えは ④ となる．

(3) この微分方程式は，判別式 $D = 4^2 - 4b = 4(4-b)$ の符号によって解の形が変化する．初期値問題をそれぞれの場合について解くと次のようになる．

1. $b > 4$ $(D < 0)$ のとき，解は

$$y = \frac{4}{\sqrt{b-4}} e^{-2x} \sin \sqrt{b-4}x$$

であり，$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$

2. $b = 4$ $(D = 0)$ のとき，解は

$$y = 4xe^{-2x}$$

であり，$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$

3. $b < 4$ $(D > 0)$ のとき，解は

$$y = \frac{2}{\sqrt{4-b}}[e^{-(2-\sqrt{4-b})x} - e^{-(2+\sqrt{4-b})x}]$$

である．この解について

(a) $0 < b < 4$ のとき，

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

(b) $b = 0$ のとき，

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}(1 - e^{-4x}) = 1.$$

(c) $b < 0$ のとき，

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty.$$

したがって，$\boxed{\mathbf{48}}$ の答えは ⓪ となる．

問 5　$y(x)$, $z(x)$ に関する微分方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} y' = y + kz \\ z' = 4y \end{cases}$$

を初期条件 $y(0) = -1$, $z(0) = 6$ のもとで考える．ただし，k は定数とする．

(1)　$(*)$ の 2 つの方程式から z を消去し，y に関する単独の 2 階微分方程式を導くと

$$(**)\qquad y'' - y' - 12y = 0$$

となるのは $k = \boxed{\mathbf{49}}$ のときである．$(**)$ に対する初期条件は，$y(0) = -1$, $y'(0) = \boxed{\mathbf{50}}$ となる．

$\boxed{49}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

$\boxed{50}$ の解答群

⓪ 10	① 11	② 17	③ 18
④ 24	⑤ 25	⑥ 31	⑦ 32

(2)　初期条件 $y(0) = -1$, $y'(0) = \boxed{\mathbf{50}}$ を満たす方程式 $(**)$ の解は，$y(x) = \boxed{\mathbf{51}}$ である．

$\boxed{51}$ の解答群

⓪ $e^{4x} - 2e^{-3x}$	① $2e^{4x} - 3e^{-3x}$	② $3e^{4x} - 4e^{-3x}$
③ $4e^{4x} - 5e^{-3x}$	④ $e^{3x} - 2e^{-4x}$	⑤ $2e^{3x} - 3e^{-4x}$
⑥ $3e^{3x} - 4e^{-4x}$	⑦ $4e^{3x} - 5e^{-4x}$	

解説

(1)　$y' = y + kz$ の両辺を x で微分し，$z' = 4y$ を代入すると

$$y'' = y' + kz' = y' + 4ky$$

すなわち

$$y'' - y' - 4ky = 0$$

となるから，$k = 3$ のとき $(**)$ が導かれる．このとき，

$$y'(0) = y(0) + kz(0) = -1 + 3 \cdot 6 = 17$$

となる．以上より，$\boxed{\mathbf{49}}$，$\boxed{\mathbf{50}}$ の答えは順に ③, ② となる．

(2)　$(**)$ の特性方程式

$$\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$$

の解は $\lambda = 4, -3$ である．したがって，$(**)$ の一般解は

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} \quad （C_1, C_2 \text{ は任意定数}）$$

となる．初期条件

$$y(0) = C_1 + C_2 = -1, \quad y'(0) = 4C_1 - 3C_2 = 17$$

を代入すると $C_1 = 2$, $C_2 = -3$ であるから，解は

$$y = 2e^{4x} - 3e^{-3x}$$

となる．したがって，$\boxed{\mathbf{51}}$ の答えは ① となる．

第4分野　確率・統計

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{52}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{70}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1 (1) 確率変数 X の確率分布が

X の値	-1	0	3	5
確率	a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

(a は定数)

で与えられている．このとき，$a = \boxed{\mathbf{52}}$ であり，$E(X) = \boxed{\mathbf{53}}$ である．また，$E(X^2) = \boxed{\mathbf{54}}$ であるから，$V(X) = \boxed{\mathbf{55}}$ である．

$\boxed{\mathbf{52}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{55}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② -1　③ $\frac{1}{2}$　④ $-\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{3}{2}$　⑥ $-\frac{3}{2}$　⑦ $\frac{1}{3}$　⑧ $-\frac{1}{3}$　⑨ $\frac{1}{5}$

ⓐ $\frac{1}{10}$　ⓑ $\frac{3}{10}$　ⓒ $\frac{51}{10}$　ⓓ $\frac{69}{10}$　ⓔ $\frac{1}{20}$

ⓕ $\frac{9}{20}$　ⓖ $\frac{69}{20}$　ⓗ $\frac{93}{20}$

(2) 2 つの事象 A, B に対し，事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A\,|\,B)$ で表す．$P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$, $P(A\,|\,B) = \dfrac{1}{3}$ とすると，$P(A \cap B) = \boxed{\mathbf{56}}$ であり，A と B は $\boxed{\mathbf{57}}$．

$\boxed{56}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{2}{3}$　④ $\dfrac{1}{4}$　⑤ $\dfrac{1}{6}$

⑥ $\dfrac{1}{9}$　⑦ $\dfrac{2}{9}$　⑧ $\dfrac{1}{12}$　⑨ $\dfrac{7}{12}$　ⓐ $\dfrac{1}{24}$

$\boxed{57}$ の解答群

⓪ 独立である　① 従属である（独立ではない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

解説

(1) 確率の合計が 1 であることから，

$$a + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

となり，これより $a = \dfrac{1}{10}$ を得る．次に，離散型確率変数の期待値の定義から，

$$E(X) = -1 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{2}$$

を得る．また，

$$E(X^2) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{10} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 3^2 \cdot \frac{1}{5} + 5^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{69}{10}$$

であるから，公式 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ を用いると，

$$V(X) = \frac{69}{10} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{93}{20}$$

がわかる．以上より，$\boxed{\mathbf{52}}$ ～ $\boxed{\mathbf{55}}$ の答えは順に ⓐ, ⑤, ⓓ, ⓗ となる．

(2)　条件付き確率の定義から，

$$\frac{1}{3} = P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 4P(A\cap B)$$

となり，これより $P(A\cap B) = \dfrac{1}{12}$ を得る．また，$P(A) = P(A|B) = \dfrac{1}{3}$ であるから，A と B は独立であることが分かる．以上より，$\boxed{\mathbf{56}}$，$\boxed{\mathbf{57}}$ の答えは順に ⑧，⓪ となる．

問 2 2 つの確率変数 X, Y は独立で，ともにパラメータ λ をもつポアソン分布に従っているとする．すなわち

$$P(X=k) = P(Y=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

とする．このとき，$P(X=1, Y=1) = \boxed{\mathbf{58}}$ である．また，$P(X \geqq 1) = \boxed{\mathbf{59}}$ であるから，$P(X \geqq 1, Y=0) = \dfrac{1}{4}$ となるのは $\lambda = \boxed{\mathbf{60}}$ のときである．

$\boxed{58}$ ・ $\boxed{59}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $e^{-\lambda}$	③ $1-e^{-\lambda}$
④ $\lambda e^{-\lambda}$	⑤ $1-\lambda e^{-\lambda}$	⑥ $\lambda^2 e^{-\lambda}$	⑦ $1-\lambda^2 e^{-\lambda}$
⑧ $e^{-2\lambda}$	⑨ $1-e^{-2\lambda}$	ⓐ $\lambda e^{-2\lambda}$	ⓑ $1-\lambda e^{-2\lambda}$
ⓒ $\lambda^2 e^{-2\lambda}$	ⓓ $1-\lambda^2 e^{-2\lambda}$		

$\boxed{60}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 4	④ $\dfrac{1}{2}$
⑤ $\dfrac{1}{4}$	⑥ $\sqrt{2}$	⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	⑧ e	⑨ $\dfrac{e}{2}$
ⓐ e^2	ⓑ $\log 2$	ⓒ $\dfrac{1}{2}\log 2$	ⓓ $2\log 2$	

解説

X と Y は独立であるから

$$P(X=1, Y=1) = P(X=1)P(Y=1)$$

が成立し，X, Y がそれぞれパラメータ λ をもつポアソン分布に従うことから

$$P(X=1) = P(Y=1) = e^{-\lambda}\lambda$$

となる．したがって，

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=e^{-2\lambda}\lambda^2$$

を得る．また，$P(X=0)=P(Y=0)=e^{-\lambda}$ なので

$$P(X\geqq 1)=1-P(X=0)=1-e^{-\lambda}$$

であり，さらに X,Y の独立性を用いると

$$P(X\geqq 1,Y=0)=P(X\geqq 1)P(Y=0)=(1-e^{-\lambda})e^{-\lambda}=e^{-\lambda}-e^{-2\lambda}$$

となる．この右辺が $\dfrac{1}{4}$ に等しいときの λ の値を求める．$x=e^{-\lambda}$ とおくと，2 次方程式

$$-x^2+x=\frac{1}{4}$$

を解けばよいことがわかる．これを解くと $x=\dfrac{1}{2}$ となる．最後に $e^{-\lambda}=\dfrac{1}{2}$ から λ を求めると，$\lambda=\log 2$ を得る．以上より，$\boxed{\textbf{58}}\sim\boxed{\textbf{60}}$ の答えは順に ⓒ, ③, ⓑ となる．

問 3 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6} & (0 \leqq x < 2) \\ \dfrac{1}{3} & (2 \leqq x < 4) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で与えられている．

(1) $P(1 \leqq X \leqq 3) =$ **61** である．また $E(X) =$ **62** , $V(X) =$ **63** である．

61 〜 63 の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ $\dfrac{1}{2}$	⑤ $\dfrac{3}{2}$
⑥ $\dfrac{1}{3}$	⑦ $\dfrac{2}{3}$	⑧ $\dfrac{5}{3}$	⑨ $\dfrac{7}{3}$	ⓐ $\dfrac{14}{3}$	ⓑ $\dfrac{20}{3}$
ⓒ $\dfrac{1}{6}$	ⓓ $\dfrac{7}{6}$	ⓔ $\dfrac{1}{9}$	ⓕ $\dfrac{11}{9}$	ⓖ $\dfrac{20}{9}$	ⓗ $\dfrac{28}{9}$

(2) X の分布関数を $F(x) = P\,(X \leqq x)$ とすると

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \boxed{\mathbf{64}} & (0 \leqq x < 2) \\ \boxed{\mathbf{65}} & (2 \leqq x < 4) \\ 1 & (4 \leqq x) \end{cases}$$

である．

64 ・ 65 の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{3}x$	③ $\dfrac{1}{6}x$
④ $\dfrac{1}{8}x$	⑤ x	⑥ $\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3}$	⑦ $\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$
⑧ $\dfrac{1}{3}x + 1$	⑨ $\dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{3}$	ⓐ $\dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{3}$	ⓑ $\dfrac{1}{6}x - \dfrac{1}{6}$
ⓒ $\dfrac{1}{3}x^2$	ⓓ $\dfrac{1}{6}x^2$	ⓔ $\dfrac{1}{12}x^2$	

解説

(1) 連続型確率変数の確率密度関数の定義から，

$$P(1 \leqq X \leqq 3) = \int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{6}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

となる．また，連続型確率変数の期待値の定義から，

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x}{6}\,dx + \int_2^4 \frac{x}{3}\,dx = \left[\frac{x^2}{12}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{6}\right]_2^4 \\ &= \frac{4}{12} + \frac{16}{6} - \frac{4}{6} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

を得る．同様にして $E(X^2)$ を計算すると，

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{x^2}{6}\,dx + \int_2^4 \frac{x^2}{3}\,dx = \left[\frac{x^3}{18}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{9}\right]_2^4 \\ &= \frac{8}{18} + \frac{64}{9} - \frac{8}{9} = \frac{20}{3}. \end{aligned}$$

これと $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ より，

$$V(X) = \frac{20}{3} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{11}{9}$$

を得る．以上より， $\boxed{\textbf{61}}$ ～ $\boxed{\textbf{63}}$ の答えは順に ④, ⑨, ⓕ となる．

(2) $0 \leqq x < 2$ のとき，連続型確率変数の分布関数の定義から，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{6}\,dt = \frac{x}{6}.$$

また，$2 \leqq x < 4$ のとき，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^2 \frac{1}{6}\,dt + \int_2^x \frac{1}{3}\,dt = \frac{2}{6} + \frac{x-2}{3} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

を得る．以上より， $\boxed{\textbf{64}}$ ， $\boxed{\textbf{65}}$ の答えは順に ③, ⑥ となる．

問 4　A 農園では，毎年ある品種のみかんを生産し，一定の時期に出荷を行なっている．今年収穫したみかん 1 個あたりの重さの平均を μ g とする．いま，無作為に何個かを標本として取り出し，それぞれの重さを測定することにより，μ の値を信頼度 95% で区間推定する．また，信頼区間の幅を 2 g 以下にするために必要な標本の個数の最小値を求める．なお，これまでの経験から，みかん 1 個あたりの重さの分布は，正規分布に従い，その標準偏差は 5 g であることがわかっている．

まず，標本の個数を n とし，それぞれの重さを表す確率変数を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とすると，これらは互いに独立であり，いずれも正規分布 $N(\mu, 5^2)$ に従う．よって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

は正規分布 $N\left(\boxed{\mathbf{66}}, \boxed{\mathbf{67}}\right)$ に従う．そこで

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\boxed{\mathbf{68}}}$$

とおけば，Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である．正規分布表から

$$P(Z \geqq 1.96) \fallingdotseq 0.025$$

であることがわかり

$$P\left(\overline{X} - \boxed{\mathbf{69}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + \boxed{\mathbf{69}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

を得る．これは，信頼度 95% の信頼区間の幅が $2 \times \boxed{\mathbf{69}}$ であることを意味する．したがって，その幅を 2 以下にする個数 n の最小値は $\boxed{\mathbf{70}}$ である．

$\boxed{\mathbf{66}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② μ	③ 2μ	④ $n\mu$
⑤ $\dfrac{\mu}{n}$	⑥ μ^2	⑦ $2\mu^2$	⑧ $n\mu^2$	⑨ $\dfrac{\mu^2}{n}$

$\boxed{67}$ ・ $\boxed{68}$ の解答群

⓪ 5	① $5n$	② $5n^2$	③ $5\sqrt{n}$	④ $\dfrac{5}{n}$
⑤ $\dfrac{5}{n^2}$	⑥ $\dfrac{5}{\sqrt{n}}$	⑦ 5^2	⑧ $5^2 n$	⑨ $5^2 n^2$
ⓐ $\dfrac{5^2}{n}$	ⓑ $\dfrac{5^2}{n^2}$	ⓒ $\sqrt{5}$	ⓓ $\sqrt{5}n$	ⓔ $\dfrac{\sqrt{5}}{n}$

$\boxed{69}$ の解答群

⓪ 0.025	① 0.05	② 1.96	③ 9.8	④ 19.6
⑤ $\dfrac{1.96}{n}$	⑥ $\dfrac{9.8}{n}$	⑦ $\dfrac{19.6}{n}$	⑧ $\dfrac{1.96}{\sqrt{n}}$	⑨ $\dfrac{9.8}{\sqrt{n}}$
ⓐ $\dfrac{19.6}{\sqrt{n}}$	ⓑ $1.96 \times n$	ⓒ $9.8 \times n$	ⓓ $19.6 \times n$	

$\boxed{70}$ の解答群

⓪ 5	① 6	② 10	③ 12	④ 20	⑤ 24
⑥ 25	⑦ 50	⑧ 64	⑨ 65	ⓐ 96	ⓑ 97
ⓒ 100	ⓓ 195	ⓔ 196	ⓕ 256	ⓖ 384	ⓗ 385

解説

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ の分布が独立で，それぞれが同じ正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき，標本平均 $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n\}$ の分布も正規分布であり，

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= \frac{1}{n}\left\{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\right\} \\ &= \frac{1}{n}\left(\mu + \mu + \cdots + \mu\right) \quad (\mu \text{ が } n \text{ 個}) \\ &= \frac{n\mu}{n} = \mu \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} V(\overline{X}) &= \frac{1}{n^2}\left\{V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\right\} \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2\right) \quad (\sigma^2 \text{ が } n \text{ 個}) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

が成立する．よって $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う．この問題では $\sigma = 5$ であるから，$\boxed{\mathbf{66}}$，$\boxed{\mathbf{67}}$ の答えは順に ②, ⓐ となる．

次に，$\overline{X}$ を標準化するには，$\overline{X}$ から平均 μ を引き，標準偏差 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{5}{\sqrt{n}}$ で割ればよいので，

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{5}{\sqrt{n}}}$$

である．よって $\boxed{\mathbf{68}}$ の答えは ⑥ となる．

さて，

$$P(Z \geqq 1.96) \fallingdotseq 0.025$$

および正規分布の対称性から，

$$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) = 1 - 2 \times P(Z \geqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

を得る．ここで，

$$
\begin{aligned}
-1.96 \leqq Z \leqq 1.96 &\iff -1.96 \leqq \frac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{5}{\sqrt{n}}} \leqq 1.96 \\
&\iff -1.96\frac{5}{\sqrt{n}} \leqq \overline{X}-\mu \leqq 1.96\frac{5}{\sqrt{n}} \\
&\iff -1.96\frac{5}{\sqrt{n}} \leqq \mu-\overline{X} \leqq 1.96\frac{5}{\sqrt{n}} \\
&\iff \overline{X}-1.96\frac{5}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \overline{X}+1.96\frac{5}{\sqrt{n}} \\
&\iff \overline{X}-\frac{9.8}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \overline{X}+\frac{9.8}{\sqrt{n}}
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
P\left(\overline{X}-\frac{9.8}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \overline{X}+\frac{9.8}{\sqrt{n}}\right) \fallingdotseq 0.95
$$

を得る．したがって， $\boxed{\textbf{69}}$ の答えは ⑨ となる．

信頼区間の幅は $2 \times \dfrac{9.8}{\sqrt{n}}$ であるから，この幅が 2 以下であるためには，

$$
\begin{aligned}
2 \times \frac{9.8}{\sqrt{n}} \leqq 2 &\iff 9.8 \leqq \sqrt{n} \\
&\iff (9.8)^2 \leqq n \\
&\iff 96.04 \leqq n
\end{aligned}
$$

であればよい．このような最小の自然数は $n = 97$ である．以上より， $\boxed{\textbf{70}}$ の答えは ⓑ となる．