EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2019年12月14日（土）

4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分

3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) 机の右上に学生証を提示すること．
(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．
(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(4) マークには **HB** または **B** の鉛筆 (またはシャープペンシル) を使用すること．
(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．
(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．
(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．
(8) 問題冊子は持ち帰ること．
(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\textbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ には $\boxed{\textbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\textbf{23}}$ は $\left(\boxed{\textbf{23}}\right)$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2 - \boxed{\textbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

目次

第 1 分野　微分積分

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{17}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x, \cos x, \tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$，$\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$，$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問 1　次の 2 つの極限値を求めよ．

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} = \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2x+1} = \boxed{\mathbf{2}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ -1	④ -2
⑤ $\dfrac{1}{2}$	⑥ $-\dfrac{1}{2}$	⑦ e	⑧ $e+1$	⑨ e^2+1
ⓐ e^2	ⓑ e^{-2}	ⓒ $2e$	ⓓ ∞	ⓔ $-\infty$

解説

2 倍角の公式 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$ と極限の基本公式 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を適用すると

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 x}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1$$

となる．したがって，$\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ① である．または，極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，ロピタルの定理を用いて

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin 2x}{4x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$$

としても容易に求められる．

$h = x + 1$ とおくと，ネイピア数 e の定義 $e = \lim_{h \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{h}\right)^h = 2.7182\cdots$ より

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{2x+1} &= \lim_{h \to \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{2h-1} \\
&= \lim_{h \to \infty} \left[\left\{\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h\right\}^2 \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{-1}\right] \\
&= e^2
\end{aligned}$$

であるから， $\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは ⓐ である．

問 2　関数 $\sin x$ および e^{x^2} のマクロ－リン展開（$x=0$ を中心とするテイラー展開）はそれぞれ

$$\sin x = \boxed{\mathbf{3}},$$
$$e^{x^2} = 1 + \boxed{\mathbf{4}}\,x + x^2 + \boxed{\mathbf{5}}\,x^3 + \frac{x^4}{2} + \cdots$$

である．したがって

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^3\sin x} = \boxed{\mathbf{6}}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ の解答群

⓪ $1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots$　① $1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}+\cdots$

② $x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots$　③ $-x+\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^7}{7!}-\cdots$

④ $\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}+\dfrac{x^8}{8!}+\cdots$　⑤ $x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^7}{7!}+\cdots$

$\boxed{\mathbf{4}}$ ～ $\boxed{\mathbf{6}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{6}$

⑤ ∞　⑥ -1　⑦ $-\dfrac{1}{2}$　⑧ $-\dfrac{1}{3}$　⑨ $-\dfrac{1}{6}$

解説

マクローリン展開可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

で与えられる．ここで，$f^{(n)}(x)$ は 関数 $f(x)$ の n 階導関数を表す．$\sin x$ はマクローリン展開可能であり，

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

となることから，$\sin x$ のマクローリン展開は

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$$

である．したがって，$\boxed{\mathbf{3}}$ の答えは ② である．

また，関数 e^x のマクローリン展開は

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

なので，この x に x^2 を代入すると，関数 e^{x^2} のマクローリン展開

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

が得られる．したがって，$\boxed{\mathbf{4}}$ と $\boxed{\mathbf{5}}$ の答えは，共に ⓪ である．

これらの結果と，ランダウの記号を用いれば

$$\sin x = x + o(x), \quad e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

となる．よって

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^3 \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^3(x + o(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{o(x^4)}{x^4}}{1 + \dfrac{o(x)}{x}} = \frac{1}{2}$$

なので，$\boxed{\mathbf{6}}$ の答えは，② である．または，極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^3 \sin x}$ は $\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，マクローリン展開を用いず，ロピタルの定理を繰り返し用いて求めることも可能であるが，以下の通り計算は煩雑になる．以下では 1 行目と 3 行目でロピタルの定理を用いている．

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^3 \sin x} &= \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2} - 2x}{3x^2 \sin x + x^3 \cos x} \\
&= 2 \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x \sin x + x^2 \cos x} \\
&= 2 \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2}}{3 \sin x + 3x \cos x + 2x \cos x - x^2 \sin x} \\
&= 4 \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}}{\dfrac{3 \sin x}{x} + 3 \cos x + 2 \cos x - x \sin x} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

問 3 (1) 定積分 $I_1 = \int_0^1 \cos^{-1} x\, dx$ を変数変換を用いて求める．$t = \cos^{-1} x$ とおくと，$x = \cos t$ なので

$$I_1 = \int_0^{\boxed{\mathbf{7}}} t \sin t\, dt$$

と表される．これを計算すると $I_1 = \boxed{\mathbf{8}}$ が得られる．

(2) 定積分 $I_2 = \int_0^1 (\cos^{-1} x)^2\, dx$ についても，(1) と同じ変数変換をすると

$$I_2 = \int_0^{\boxed{\mathbf{7}}} \boxed{\mathbf{9}}\, dt$$

となるので，これを計算すると $I_2 = \boxed{\mathbf{10}}$ を得る．

$\boxed{\mathbf{7}}$ ・ $\boxed{\mathbf{8}}$ ・ $\boxed{\mathbf{10}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② π	③ $\pi - 1$	④ $\pi - 2$
⑤ $\dfrac{\pi}{2}$	⑥ $\dfrac{\pi^2}{4} - 1$	⑦ 2π	⑧ $1 - \pi$	⑨ $2 - \pi$
ⓐ $\dfrac{\pi}{4}$	ⓑ $\dfrac{\pi^2}{4} - 2$	ⓒ $\dfrac{\pi^2}{4}$	ⓓ $\dfrac{\pi^3}{24}$	ⓔ $\dfrac{\pi}{2} - 1$

$\boxed{\mathbf{9}}$ の解答群

⓪ t^2	① $\sin^2 t$	② $t^2 \sin t$	③ $t \sin^2 t$	④ $t^2 \sin^2 t$
⑤ $t \cos t$	⑥ $\cos^2 t$	⑦ $t^2 \cos t$	⑧ $t \cos^2 t$	⑨ $t^2 \cos^2 t$

解説

(1) 変数変換 $t=\cos^{-1}x$ すなわち $x=\cos t$ とおくと，x が $0\to 1$ のとき t は $\dfrac{\pi}{2}\to 0$ に対応する．また，$\dfrac{dx}{dt}=-\sin t$ であるので，変数変換の公式を用いて

$$I_1=\int_0^1 \cos^{-1}x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 t\left(\frac{dx}{dt}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin t\,dt$$

を得る．また，部分積分の公式より

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t(-\cos t)'\,dt=\Big[-t\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

となるので， $\boxed{\mathbf{7}}$ の答えは ⑤， $\boxed{\mathbf{8}}$ の答えは ① である．

(2) (1) と同じく $t=\cos^{-1}x$ と変数変換すると，

$$I_2=\int_0^1\left(\cos^{-1}x\right)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\sin t\,dt$$

となる．さらに，部分積分の公式を 2 回用いると

$$\begin{aligned}I_2&=\Big[-t^2\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\,dt\\&=2\Big[t\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt\\&=\pi+2\Big[\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2\end{aligned}$$

となる．よって， $\boxed{\mathbf{9}}$ の答えは ②， $\boxed{\mathbf{10}}$ の答えは ④ である．

問 4 関数 $u(x,y)=a\log(1+x^2+y^2)$ を考える．ただし a は 0 でない定数とする．このとき

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\boxed{\mathbf{11}},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\boxed{\mathbf{12}}$$

である．同様に，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を計算すると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\boxed{\mathbf{13}}$$

となる．したがって，$a=\boxed{\mathbf{14}}$ とすると，u は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-8e^u$$

を満たす．

$\boxed{\mathbf{11}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{a}{1+x^2+y^2}$　① $\dfrac{ax}{1+x^2+y^2}$　② $\dfrac{2ax}{1+x^2+y^2}$

③ $-\dfrac{a}{1+x^2+y^2}$　④ $-\dfrac{ax}{1+x^2+y^2}$　⑤ $-\dfrac{2ax}{1+x^2+y^2}$

$\boxed{\mathbf{12}}$ ・ $\boxed{\mathbf{13}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{a}{(1+x^2+y^2)^2}$　① $\dfrac{2ax}{(1+x^2+y^2)^2}$　② $-\dfrac{2ax}{(1+x^2+y^2)^2}$

③ $\dfrac{a(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$　④ $\dfrac{2a(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$　⑤ $\dfrac{2a(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$

⑥ $\dfrac{2a}{(1+x^2+y^2)^2}$　⑦ $-\dfrac{2a}{(1+x^2+y^2)^2}$　⑧ $\dfrac{8a}{(1+x^2+y^2)^2}$

⑨ $\dfrac{4a}{(1+x^2+y^2)^2}$　ⓐ $-\dfrac{4a}{(1+x^2+y^2)^2}$　ⓑ $-\dfrac{8a}{(1+x^2+y^2)^2}$

$\boxed{\mathbf{14}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}$　① 1　② 2　③ 4　④ 8

⑤ $-\dfrac{1}{2}$　⑥ -1　⑦ -2　⑧ -4　⑨ -8

解説

関数 $u(x,y) = a\log(1+x^2+y^2)$ を x で偏微分すると，合成関数の偏微分公式から

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2ax}{1+x^2+y^2}$$

となる．したがって，$\boxed{\textbf{11}}$ の答えは ② である．再度偏微分すると，商の偏微分公式より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{2a(1+x^2+y^2)-2ax(2x)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2a(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

となる．したがって，$\boxed{\textbf{12}}$ の答えは ④ である．同様に計算すると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2a(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$$

となるので，

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{4a}{(1+x^2+y^2)^2}$$

となる．したがって，$\boxed{\textbf{13}}$ の答えは ⑨ である．さらに $e^{\log X} = X$ に注意すると

$$e^u = e^{a\log(1+x^2+y^2)} = e^{\log(1+x^2+y^2)^a} = (1+x^2+y^2)^a$$

となる．よって

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -8e^u$$

を満たす，すなわち

$$4a(1+x^2+y^2)^{-2} = -8(1+x^2+y^2)^a$$

を満たすのは，$a=-2$ である．したがって，$\boxed{\textbf{14}}$ の答えは ⑦ である．

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ は “ラプラシアン (Laplacian)” と呼ばれるものであり，∇^2 と書かれることもある．また $-\Delta u = \lambda e^u$ は，統計力学やゲージ理論など自然科学のいろいろな分野において現れる偏微分方程式として知られており，“ボルツマン・ポワソン (Boltzmann-Poisson) 方程式” もしくは “ゲルファント (Gel’fand) 方程式” と呼ばれる．

問 5 xy 平面内の集合 D が

$$D = \{\,(x,\,y) \mid x \geqq y \geqq 0,\ x+y \leqq 1\,\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D e^{(x+y)^3}(x-y)\,dxdy$$

の値を求める．変数変換 $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$ を行うと，集合 D は (u, v) の集合

$$\left\{\,(u,\,v)\ \middle|\ 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq \boxed{\textbf{15}}\,\right\}$$

に対応する．この変換のヤコビ行列式（ヤコビアン）は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \boxed{\textbf{16}}$$

である．これらを用いると $I = \boxed{\textbf{17}}$ を得る．

$\boxed{\textbf{15}}$ ・ $\boxed{\textbf{16}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}$	① 1	② 2	③ u	④ $u+v$	⑤ $\dfrac{uv}{2}$
⑥ $-\dfrac{1}{2}$	⑦ -1	⑧ -2	⑨ u^2	ⓐ u^2+v^2	ⓑ uv

$\boxed{\textbf{17}}$ の解答群

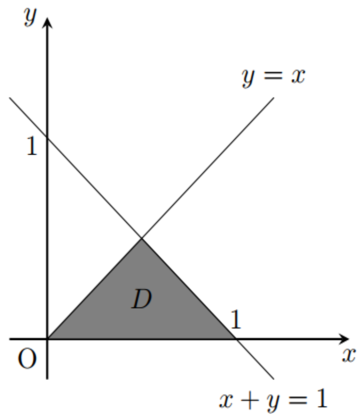
⓪ $e-1$	① $\dfrac{e-1}{2}$	② $\dfrac{e-1}{4}$	③ $\dfrac{e}{4}$	④ $\dfrac{e-1}{12}$
⑤ $1-e$	⑥ $\dfrac{1-e}{2}$	⑦ $\dfrac{1-e}{4}$	⑧ $\dfrac{e}{12}$	⑨ $\dfrac{1-e}{12}$

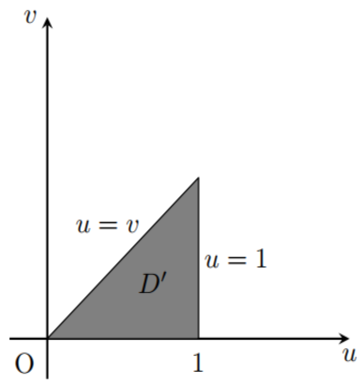
解説

変数変換 $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$ を u, v について解いた式は，$u = x+y$, $v = x-y$ である．また条件 $x \geqq y$ は $v \geqq 0$ に，条件 $y \geqq 0$ は $u \geqq v$ に，条件 $x+y \leqq 1$ は $u \leqq 1$ に対応する．したがって，下図のように xy 平面内の集合 D は，uv 平面内の集合

$$D' = \{\,(u,\,v) \mid 0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq u\,\}$$

に対応する．したがって，$\boxed{\textbf{15}}$ の答えは ③ である．





また，ヤコビ行列式 J は

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

である．したがって，$\boxed{\textbf{16}}$ の答えは ⑥ である．

ヤコビ行列式 J の絶対値をとることに注意して，重積分 I を計算すると

$$\begin{aligned} I &= \iint_D e^{(x+y)^3}(x-y)\,dxdy = \iint_{D'} e^{u^3} v\,|J|\,dudv \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^u e^{u^3} v\,dvdu = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{u^3}\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^u du \\ &= \frac{1}{12}\int_0^1 e^{u^3}(u^3)'\,du = \frac{1}{12}\left[e^{u^3}\right]_0^1 = \frac{e-1}{12} \end{aligned}$$

となる．したがって，$\boxed{\textbf{17}}$ の答えは ④ である．

第 2 分野　線形代数

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{18}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{35}}$ 〕

(注意) n 次元実ベクトル空間を $\mathbb{R}^n$ で表す．行列 A に対し，$\mathrm{rank}\, A$ は A の階数（ランク）を表す．また，1 次独立，1 次従属はそれぞれ線形独立，線形従属ともいう．

問 1　(1)　行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．$a =$ $\boxed{\mathbf{18}}$ のとき A の逆行列は存在しない．また $a = 1$ のとき行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\mathbf{19}}$ である．

$\boxed{\mathbf{18}}$ ・ $\boxed{\mathbf{19}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

(2)　行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

とするとき，逆行列 B^{-1} の $(1, 1)$ 成分は $\boxed{\mathbf{20}}$ であり，$(2, 3)$ 成分は $\boxed{\mathbf{21}}$ である．

$\boxed{\mathbf{20}}$ ・ $\boxed{\mathbf{21}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\frac{1}{2}$	③ $\frac{1}{3}$	④ $\frac{1}{4}$
	⑤ -1	⑥ $-\frac{1}{2}$	⑦ $-\frac{1}{3}$	⑧ $-\frac{1}{4}$

(3) 座標平面において，点 $\mathrm{P}(x, y)$ を点 $\mathrm{Q}(u, v)$ にうつす線形変換 (1 次変換) f を

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (a,\ b \text{ は定数})$$

により定める．f により，直線 $y = 2x + 1$ 上のすべての点が直線 $y = x + 1$ 上にうつるのは，$a =$ **22** , $b =$ **23** のときである．

22 ・ **23** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
	⑤ -1	⑥ -2	⑦ -3	⑧ -4

解説

(1) 行列 A の行列式 $|A|$ を第 4 列で展開し，次に第 2 列で展開すると，

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = a + 4$$

となる．A の逆行列が存在するための必要十分条件は，$|A| \neq 0$ であるから，$a = -4$ のとき A の逆行列は存在しない．また，$a = 1$ のとき $|A| = 5$ となる．したがって **18** ， **19** の答えは順に ⑨, ⑤ である．

(2) 次の行列

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

を基本変形して，B の逆行列を求める．1 行目と 2 行目にそれぞれ 3 行目を加え，3 行目を -2 で割ると，

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

1 行目に 3 行目を加え，3 行目から 2 行目を引くと，

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

1 行目から 2 行目を引くと，

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

3 行目から 1 行目を引くと，

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる．よって

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を得る．したがって，B^{-1} の $(1, 1)$ 成分は 1，$(2, 3)$ 成分は 1 となる．以上より，$\boxed{\mathbf{20}}$, $\boxed{\mathbf{21}}$ の答えは順に ①, ① である．

(3)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 2x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+2)x+1 \\ (-1+2b)x+b \end{pmatrix}$$

であるから，直線 $y = 2x+1$ 上の任意の点 $(x, 2x+1)$ が $y = x+1$ 上にうつるのは，上の u, v がすべての x に対して $v = u+1$ すなわち，$(-1+2b)x+b = (a+2)x+1+1$ を満たすときである．これから係数を比較して，

$$\begin{cases} -1+2b = a+2 \\ b = 2 \end{cases}$$

であるから，$a = 1, b = 2$ を得る．以上より，$\boxed{\mathbf{22}}$, $\boxed{\mathbf{23}}$ の答えは順に ①, ② である．

問 2 ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底とする．このとき

$$\boldsymbol{a} = s\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + t\boldsymbol{w},$$
$$\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{u} - 4\boldsymbol{v},$$
$$\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$$

とおく．ただし，s, t は定数とする．

(1) 内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 0$ とすると，ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ はいずれも大きさが 1 で互いに直交していることから，$s =$ **24** , $t =$ **25** である．

24 ・ **25** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

(2) $\mathbb{R}^3$ 空間の原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{c}$ となる点を B, C とする．このとき，三角形 $\triangle\mathrm{OBC}$ の面積は **26** である．

26 の解答群

⓪ 3	① $\sqrt{11}$	② $\sqrt{13}$	③ $\sqrt{14}$	④ 4	⑤ $\sqrt{17}$
⑥ $\sqrt{19}$	⑦ $\sqrt{21}$	⑧ $\sqrt{23}$			

(3) $s = 1$ とすると，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立になるのは $t \neq$ **27** のときである．

27 の解答群

⓪ 0	① 1	② $\frac{1}{2}$	③ $\frac{1}{3}$	④ $\frac{2}{3}$	⑤ $\frac{1}{4}$
⑥ $\frac{3}{4}$	⑦ $-\frac{1}{2}$	⑧ $-\frac{1}{3}$	⑨ $-\frac{2}{3}$	ⓐ $-\frac{1}{4}$	ⓑ $-\frac{3}{4}$

解説

(1) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は正規直交基底なので，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} = 1,\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} = 0$ であることから，

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2s-4, \qquad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 2s+t$$

となる．したがって，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} = 0$ から，$s=2,\ t=-4$ となる． $\boxed{\textbf{24}}$, $\boxed{\textbf{25}}$ の答えは順に ②, ⑨ である.

(2) 角 $\angle\mathrm{BOC}$ の大きさを $\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると，$\triangle\mathrm{OBC}$ の面積 S は $S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\sin\theta$ で与えられる．一方，内積は，

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\theta = \sqrt{20}\cdot\sqrt{5}\cos\theta = 10\cos\theta \\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 4 \end{cases}$$

であるから，これから $\cos\theta = \dfrac{2}{5}$ を得る．したがって，$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{21}{25}}$ から，

$$S = \frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{\frac{21}{25}} = \sqrt{21}$$

となる． $\boxed{\textbf{26}}$ の答えは ⑦ である.

(3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立であるとは,

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

ということである．このことから $s = 1$ として $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ であるとき，$\alpha = \beta = \gamma = 0$ となるための t の条件をみつければよい．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ による表現に書き換えると， $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ は

$$\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + t\boldsymbol{w}) + \beta(2\boldsymbol{u} - 4\boldsymbol{v}) + \gamma(2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}$$

となるので， $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ でまとめ直すと

$$(\alpha + 2\beta + 2\gamma)\boldsymbol{u} + (\alpha - 4\beta)\boldsymbol{v} + (\alpha t + \gamma)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$$

となる．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は正規直交基底であるので 1 次独立である．よって

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 & \cdots\ \text{(a)} \\ \alpha - 4\beta = 0 & \cdots\ \text{(b)} \\ \alpha t + \gamma = 0 & \cdots\ \text{(c)} \end{cases}$$

が成り立つ．(a), (b) から $\alpha = 4\beta, \gamma = -3\beta$ となり，これらを (c) に代入すると，$(4t-3)\beta = 0$ を得る．したがって，$t \neq \dfrac{3}{4}$ のとき $\alpha = \beta = \gamma = 0$ となることがわかる．すなわち，$t \neq \dfrac{3}{4}$ のとき，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次独立になる．したがって．$\boxed{\mathbf{27}}$ の答えは ⑥ である．

注意．この問題において $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は $\mathbb{R}^3$ における一般の正規直交基底であるので，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の選び方は一通りではない．$\mathbb{R}^3$ の正規直交基底の代表的な例としては，$\boldsymbol{u} = (1, 0, 0), \boldsymbol{v} = (0, 1, 0), \boldsymbol{w} = (0, 0, 1)$ の標準基底があげられる．実は，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ をこの標準基底に選んで $\boldsymbol{a} = (s, 1, t), \boldsymbol{b} = (2, -4, 0), \boldsymbol{c} = (2, 0, 1)$ と表して，それをもとに計算を行っても、(1) から (3) の解答を得ることができる．それは，これらのことが $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底の選び方によらないからである．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を先の標準基底に選んで，上の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の表示を用いて (3) を考えてみよう．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立になるための必要十分条件は，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ からなる行列式 $|\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}|$ の値が 0 ではないことであるので、 $s = 1$ として $|\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}|$ を計算すると，

$$|\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 8t.$$

ここで，$-6 + 8t = 0$ をとくと，$t = \dfrac{3}{4}$ なので，$t \neq \dfrac{3}{4}$ のとき，行列式 $|\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}| \neq 0$ となる．よって，$t \neq \dfrac{3}{4}$ のとき $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ は 1 次独立になる．

問 3 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ の対角化について考える．

(1) A の固有値を λ_1, λ_2 （$\lambda_1 < \lambda_2$）とすると，$(\lambda_1, \lambda_2) =$ $\boxed{\textbf{28}}$ である．また，λ_1 に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ \boxed{\textbf{29}} \end{pmatrix}$，$\lambda_2$ に対応する固有ベクトルとして $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\textbf{30}} \end{pmatrix}$ がとれる．

(2) (1) で求めた固有ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ を第 1 列，$\boldsymbol{v}$ を第 2 列にもつ行列を

$$P = (\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \boxed{\textbf{29}} & \boxed{\textbf{30}} \end{pmatrix}$$

とすると，$P^{-1}AP$ は対角行列となり，その (2, 2) 成分は $\boxed{\textbf{31}}$ となる．

$\boxed{\textbf{28}}$ の解答群

⓪ (0, 1)	① (1, 2)	② (1, 3)	③ (2, 3)
④ (−1, 1)	⑤ (−1, 2)	⑥ (−1, 3)	⑦ (−2, 3)

$\boxed{\textbf{29}}$ ～ $\boxed{\textbf{31}}$ の解答群

⓪ 0				
① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ −1	⑦ −2	⑧ −3	⑨ −4	ⓐ −5

解説

(1) 固有方程式 $|\lambda E - A| = 0$ を解く（E は 2 次元単位行列）.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{つまり}$$

$$\lambda(\lambda - 1) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

から，$\lambda = -1, 2$ を得るので，$(\lambda_1, \lambda_2) = (-1, 2)$ となる．

$\lambda_1 = -1$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

から,

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = -u_1 \\ 2u_1 = -u_2 \end{cases}$$

を解いて，0 ではない任意の定数 c に対して，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} c \\ -2c \end{pmatrix}$ となる．したがって，$c = -1$ とすれば，$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有ベクトルである．

同様に，$\lambda_2 = 2$ に対する固有ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

から,

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 2v_1 \\ 2v_1 = 2v_2 \end{cases}$$

より 0 ではない任意の定数 c に対して，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$ となる．したがって，$c = 1$ とすれば，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は固有ベクトルである．以上より，$\boxed{\textbf{28}}$, $\boxed{\textbf{29}}$, $\boxed{\textbf{30}}$ の答えは順に ⑤, ②, ① である.

(2)　$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ がそれぞれ $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$ に対応する固有ベクトルなので

$$AP=(A\boldsymbol{u}\ A\boldsymbol{v})=(\lambda_1\boldsymbol{u}\ \lambda_2\boldsymbol{v})=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

となる．行列 P は正則なので

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

となる．よって，行列 A は P によって対角化され，$P^{-1}AP$ の対角成分は固有値になる．(2, 2) 成分は $\lambda_2=2$ であるので，$\boxed{\textbf{31}}$ の答えは ② である．

注意．もしも $Q=(\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{u})$ ととると，

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

となる．

問 4　連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x + 2y + 4z = a \\ x - 2y + bz = -2 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases}$$

について考える．ただし，a, b は定数とする．

(1)　方程式 $(*)$ の係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の階数が 3 になるのは $b \neq$ **32** のときである．このとき，方程式 $(*)$ は **33** ．

(2)　方程式 $(*)$ の拡大係数行列 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & -2 & b & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ の階数が 2 となるのは $(a, b) =$ **34** のときである．このとき，方程式 $(*)$ は **35** ．

32 の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ -1　⑥ -2　⑦ -3　⑧ -4

33 ・ **35** の解答群

⓪ 解をもたない　① ただ 1 組の解をもつ

② 無数の解をもつ

34 の解答群

⓪ $(0, 0)$　① $(1, 0)$　② $(2, 0)$　③ $(3, 0)$　④ $(0, 1)$

⑤ $(1, 1)$　⑥ $(2, 1)$　⑦ $(3, 1)$　⑧ $(0, 2)$　⑨ $(1, 2)$

ⓐ $(2, 2)$　ⓑ $(3, 2)$

解説

(1) A の階数が 3 になるのは，A の各列（または各行）からなる 3 つのベクトルが 1 次独立であることにほかならない．

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & b-4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & b-4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = b$$

であることから，$b \neq 0$ のとき 3 つのベクトルは 1 次独立になるため，$\operatorname{rank} A = 3$ となる．与えられた連立方程式 $(*)$ を

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表すと，$|A| = b$ なので $b \neq 0$ のとき，A の逆行列 A^{-1} が存在し，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．すなわち，$(*)$ はただ 1 組の解をもつ．

以上より，$\boxed{\textbf{32}}$，$\boxed{\textbf{33}}$ の答えは順に ⓪，① である．

(2) 拡大係数行列 B に対し行基本操作を行う．まず，第 2 行と第 3 行から第 1 行を引くと，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & a \\ 1 & -2 & b & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & -4 & b-4 & -2-a \\ 0 & -1 & -1 & 1-a \end{pmatrix}$$

次に，第 3 行に -1 をかけた後，第 2 行と第 3 行を入れ替えると

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -4 & b-4 & -2-a \end{pmatrix}$$

さらに，第 3 行に 4 倍した第 2 行を足すと，

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & a \\ 0 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & b & 3a-6 \end{pmatrix}$$

を得る．よって，$\operatorname{rank} B = 2$ となるのは，$b = 0$ かつ $3a - 6 = 0$ のとき，つまり $\boxed{\mathbf{34}}$ は ② の $(a, b) = (2, 0)$ のときである．このとき，連立方程式 $(*)$ は

$$(*) \qquad \begin{cases} x + 2y + 4z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

に帰着されるので，方程式の個数が未知数の個数より少ない．よって，$(*)$ は無数に解を持つ．つまり $\boxed{\mathbf{35}}$ の答えは ② である．

第3分野　常微分方程式

〔問1〜問4：解答番号 $\boxed{\textbf{36}}$ 〜 $\boxed{\textbf{54}}$〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．また，特殊解は特解ともいう．

問1　関数 $y = y(x)$ $(x \geqq 0)$ は

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}, \qquad y(0) > 0$$

を満たすとする．

(1)　$\sqrt{y}$ は正の定数 C を用いて

$$\sqrt{y} = \boxed{\textbf{36}}$$

と表される．

$\boxed{\textbf{36}}$ の解答群

⓪ $x + C$	① $2x + C$	② $\dfrac{1}{2}x + C$	③ $\dfrac{3}{2}x + C$
④ $x^2 + C$	⑤ $\dfrac{1}{2}x^2 + C$	⑥ Ce^x	⑦ Ce^{2x}

(2)　関数 $y(x)$ がさらに，条件

$$y(2) = 4y(0)$$

を満たすとすると，(1) の C は $C = \boxed{\textbf{37}}$ となる．また，$y(8) = \boxed{\textbf{38}}$ である．

$\boxed{\textbf{37}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 4	④ 6	⑤ 8
	⑥ $\dfrac{1}{3}$	⑦ $\dfrac{2}{3}$	⑧ $\dfrac{4}{3}$	⑨ $\dfrac{8}{3}$	ⓐ $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

$\boxed{\textbf{38}}$ の解答群

⓪ 4	① 5	② 6	③ 7	④ 8	⑤ 9
⑥ 16	⑦ 25	⑧ 36	⑨ 49	ⓐ 64	ⓑ 81

解説

本問の微分方程式は変数分離形である．

(1) $y(0) > 0$ であるので，定数関数 $y = 0$ は与えられた条件を満たさない．そこで，$\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y}$ を形式的に $\dfrac{1}{\sqrt{y}}dy = dx$ と表し，その両辺を積分すると

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}}dy = \int dx$$

より，$2\sqrt{y} = x + C_1$ (C_1 は積分定数) を得る．ここで，$y(0) > 0$ であるので，正の定数 $C(= \sqrt{y(0)})$ を用いて

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}x + C$$

と表される．よって，$\boxed{\textbf{36}}$ の答えは ② である．

(2) 条件より，$\sqrt{y(2)} = 2\sqrt{y(0)} = 2C$ である．また $\boxed{\textbf{36}}$ より，$\sqrt{y(2)} = 1 + C$ であるので，$C = 1$ を得る．このとき $\sqrt{y(8)} = 5$ となるので，$y(8) = 25$ である．よって，$\boxed{\textbf{37}}$，$\boxed{\textbf{38}}$ の答えは順に ①, ⑦ である．

問 2　直線上を動くある物体の時刻 t での速度を $v(t)$ とする．$v = v(t)$ $(t \geqq 0)$ は微分方程式

$$(*) \qquad \frac{dv}{dt} + \frac{a}{1+t}v = b \qquad (a,\, b \text{ は正の定数})$$

を満たすとする．ここでは定数変化法を用いて $(*)$ の解を求める．

(1)　対応する同次方程式 $\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{a}{1+t}v = 0$ の一般解は，任意定数 C を用いて

$$(**) \qquad v(t) = C\,\boxed{\mathbf{39}}$$

と表される．

$\boxed{\mathbf{39}}$ の解答群

⓪ $e^{-\frac{a}{1+t}}$　① $(1+t)e^{-\frac{a}{1+t}}$　② $\dfrac{1}{1+t}e^{-a(1+t)}$　③ $(1+t)e^{-a(1+t)}$

④ $\dfrac{a}{1+t}$　⑤ $\dfrac{2a}{\sqrt{1+t}}$　⑥ $(1+t)^a$　⑦ $(1+t)^{-a}$

⑧ $\log|1+t|^{-a}$　⑨ $\log\dfrac{|1+t|}{a}$

(2)　$(**)$ における定数 C を t の関数 $u(t)$ に置き換えて $v(t) = u(t)\cdot \boxed{\mathbf{39}}$ とし，$(*)$ に代入すると，u に関する微分方程式

$$\frac{du}{dt} = \boxed{\mathbf{40}}$$

が得られる．これを解くことにより，$(*)$ の一般解 $v(t)$ が求められる．初期条件 $v(0) = 0$ のもとで $(*)$ の解は

$$v(t) = \boxed{\mathbf{41}}$$

となり，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{v(t)}{t} = \boxed{\mathbf{42}}$ である．

$\boxed{\mathbf{40}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{b}{a}(1+t)$　① $\dfrac{b}{2a}\sqrt{1+t}$　② $b(1+t)^a$　③ $b(1+t)^{-a}$

④ $b\,e^{\frac{a}{1+t}}$　⑤ $\dfrac{b}{1+t}e^{\frac{a}{1+t}}$　⑥ $b(1+t)e^{a(1+t)}$　⑦ $\dfrac{b}{1+t}e^{a(1+t)}$

⑧ $\dfrac{-b}{a\log|1+t|}$　⑨ $\dfrac{b}{\log\frac{|1+t|}{a}}$

41 の解答群

⓪ $\dfrac{bt(2+t)}{2(1+t)}$	① $\dfrac{b}{3}\left(1+t-\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$
② $\dfrac{b}{a+1}\left\{1+t-(1+t)^{-a}\right\}$	③ $\dfrac{a+1}{b}\left\{1+t-(1+t)^{a}\right\}$
④ $\dfrac{b}{a}\left(1+t-e^{\frac{at}{1+t}}\right)$	⑤ $\dfrac{b}{a}(1+t)\left(1-e^{\frac{at}{1+t}}\right)$
⑥ $\dfrac{b}{a^2}\left(a-\dfrac{1}{1+t}-\dfrac{a-1}{1+t}e^{-at}\right)$	⑦ $\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{1}{1+t}-e^{at}\right)$
⑧ $bt(1-\log\lvert 1+t\rvert)$	⑨ $t\left(b-\log\dfrac{\lvert 1+t\rvert}{a}\right)$

42 の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{b}{2}$	③ $\dfrac{b}{3}$	④ $\dfrac{b}{a}$
⑤ $\dfrac{b}{a+1}$	⑥ $\dfrac{a+1}{b}$	⑦ $\dfrac{b}{a}(1-e^{a})$	⑧ ∞	⑨ $-\infty$

解説

(1) 対応する同次方程式は変数分離形である．定数関数 $v=0$ は明らかにこの同次方程式の解である．$v\neq 0$ のとき

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt}=-\frac{a}{1+t}$$

と変形して両辺を t で積分すると，置換積分法の公式より

$$\int\frac{1}{v}dv=-\int\frac{a}{1+t}dt.$$

よって，$\log|v|=-a\log|1+t|+C_1=\log|(1+t)^{-a}e^{C_1}|$ (C_1 は任意定数) であり，$C=\pm e^{C_1}$ とおけば，C は 0 以外の任意の値をとる．よって，この同次方程式の解は

$$v(t)=C(1+t)^{-a}$$

となる．ここで，解 $v=0$ は上で $C=0$ とおくと得られる．したがって， **39** の答えは ⑦である．

(2) ここでは定数変化法を用いる．$(**)$ における定数 C を t の関数 $u(t)$ で置き換えて，$v(t) = u(t)(1+t)^{-a}$ を $(*)$ に代入すると

$$u'(t)(1+t)^{-a} - au(t)(1+a)^{-a-1} + \frac{a}{(1+t)}u(t)(1+t)^{-a} = u'(t)(1+t)^{-a} = b$$

となって

$$\frac{du}{dt} = u' = b(1+t)^a$$

が得られる．これを解くと，$u(t) = \dfrac{b}{a+1}(1+t)^{a+1} + C$ であるので，$(*)$ の一般解は

$$v = u(t)(1+t)^{-a} = \frac{b}{a+1}(1+t) + C(1+t)^{-a} \quad (C \text{ は任意定数})$$

である．$v(0) = \dfrac{b}{a+1} + C = 0$ のとき，$C = -\dfrac{b}{a+1}$ であるので，$v(0) = 0$ のもとで $(*)$ の解は

$$v(t) = \frac{b}{a+1}\left\{1 + t - (1+t)^{-a}\right\}$$

である．またこのとき

$$\lim_{t\to\infty}\frac{v(t)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{b}{a+1}\left\{\frac{1}{t} + 1 - \frac{1}{t(1+t)^a}\right\} = \frac{b}{a+1}$$

である．以上より，$\boxed{\textbf{40}}$ ～ $\boxed{\textbf{42}}$ の答えは順に ②, ②, ⑤である．

問 3　微分方程式

$$(*) \qquad y'' - 2y' + 2y = 2x^2$$

の解 $y(x)$ で，初期条件

$$(**) \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

を満たすものについて考える．

(1)　$(*)$ に対応する同次方程式

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

の一般解 y_h は任意定数 C_1, C_2 を用いて

$$y_h = \boxed{\textbf{43}}$$

と表せる．

$\boxed{\textbf{43}}$ の解答群

⓪ $C_1 \cos x + C_2 \sin x$	① $x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
② $e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$	③ $e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$
④ $C_1 + C_2 e^x$	⑤ $C_1 + C_2 e^{-x}$
⑥ $(C_1 + C_2 x)e^x$	⑦ $(C_1 + C_2 x)e^{-x}$

(2)　$(*)$ の特殊解で，定数 a, b, c を用いて

$$y_p = ax^2 + bx + c$$

と表されるものを求めると，$a = \boxed{\textbf{44}}$，$b = \boxed{\textbf{45}}$，$c = \boxed{\textbf{46}}$ となる．

(3)　$(*)$ の一般解は

$$y = y_h + y_p$$

であるから，初期条件 $(**)$ を満たすように C_1, C_2 を定めると

$$C_1 = \boxed{\textbf{47}}, \qquad C_2 = \boxed{\textbf{48}}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{44}}$ ～ $\boxed{\mathbf{48}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
	⑤ -1	⑥ -2	⑦ -3	⑧ -4
	⑨ $\dfrac{1}{2}$	ⓐ $\dfrac{3}{2}$	ⓑ $\dfrac{5}{2}$	ⓒ $\dfrac{7}{2}$
	ⓓ $-\dfrac{1}{2}$	ⓔ $-\dfrac{3}{2}$	ⓕ $-\dfrac{5}{2}$	ⓖ $-\dfrac{7}{2}$

解説

(1) $(*)$ に対応する同次方程式 $y'' - 2y' + 2y = 0$ の特性方程式

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

の解は $1 \pm i$ である．このとき，同次方程式の一般解 y_h は

$$y_h = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{43}}$ の答えは ② である．

(2) $(*)$ の特殊解を $y_p = ax^2 + bx + c$ と表すと

$$y_p' = 2ax + b, \quad y_p'' = 2a$$

となるので，$(*)$ に代入すると

$$2ax^2 + (2b - 4a)x + 2a - 2b + 2c = 2x^2$$

となる．したがって，$a = 1,\ b = 2,\ c = 1$ であり，$y_p = x^2 + 2x + 1$ である．よって，$\boxed{\mathbf{44}}$ ～ $\boxed{\mathbf{46}}$ の答えは順に ①, ②, ① となる．

(3) $(*)$ の一般解 y は対応する同次方程式の一般解 y_h と $(*)$ の特殊解 y_p の和，すなわち

$$y = y_h + y_p = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 + 2x + 1$$

と表される．初期条件 $(**)$ から

$$y(0) = C_1 + 1 = 0$$

より $C_1 = -1$ であり，$y' = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x(-C_1 \sin x + C_2 \cos x) + 2x + 2$ なので

$$y'(0) = C_1 + C_2 + 2 = 0$$

より $C_2 = -1$ である．よって，$(*)$ の一般解は

$$y = -e^x(\cos x + \sin x) + x^2 + 2x + 1$$

となる．したがって，$\boxed{\textbf{47}}$，$\boxed{\textbf{48}}$ の答えは　どちらも ⑤ となる．

問 4　関数 $q(x)$ は実数全体で連続とする．定数 a, b を含む微分方程式

$$(*) \qquad y'' + ay' + by = q(x)$$

は次の 3 つの解 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ をもつとする．

$$f_1(x) = e^x - e^{-x}, \quad f_2(x) = e^x + 2e^{-x}, \quad f_3(x) = e^x - e^{-x} + 2e^{3x}$$

(1)　定数 a, b の値を求めると，$a =$ **49** ，$b =$ **50** である．また，$q(x) =$ **51** である．

49 ・ **50** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

51 の解答群

⓪ e^{-x}	① e^x	② e^{3x}	③ $-e^{-x}$	④ $-e^x$	⑤ $-e^{3x}$
⑥ $2e^{-x}$	⑦ $2e^x$	⑧ $2e^{3x}$	⑨ $-2e^{-x}$	ⓐ $-2e^x$	ⓑ $-2e^{3x}$
ⓒ $4e^{-x}$	ⓓ $4e^x$	ⓔ $4e^{3x}$	ⓕ $-4e^{-x}$	ⓖ $-4e^x$	ⓗ $-4e^{3x}$

(2)　初期条件 $y(0) = 0$，$y'(0) = 10$ を満たす $(*)$ の解を

$$y = Ae^{-x} + Be^x + Ce^{3x} \qquad (A, B, C \text{ は定数})$$

と表したとき，$A =$ **52** ，$B =$ **53** ，$C =$ **54** である．

52 ～ **54** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

解説

(1) $f_i(x)\ \ (i=1,2,3)$ は

$$f_i''(x)+af_i'(x)+bf_i=q(x)$$

を満たすことから，$i,j\in\{1,2,3\}$ に対して，$y=f_i(x)-f_j(x)$ は同次方程式

$$(**)\qquad y''+ay'+by=0$$

の解であることがわかる．よって

$$f_2(x)-f_1(x)=3e^{-x},\ \ f_3(x)-f_1(x)=2e^{3x}$$

は同次方程式 $(**)$ の解である．これより，$(**)$ の特性方程式

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

の解が $-1,3$ であることがわかるので，解と係数の関係から，$a=-2,\,b=-3$ である.（これは $(**)$ の y に $3e^{-x}$, $2e^{3x}$ を代入してもわかる.）

次に，$(*)$ の一般解は

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+f_1(x)=D_1e^{-x}+D_2e^{3x}+e^{x}\ \ (D_1=C_1-1,\ D_2=C_2\text{ は任意定数})$$

であり，$(*)$ は e^x を解にもつので

$$q(x)=(e^x)''-2(e^x)'-3e^x=-4e^x$$

である．以上より，$\boxed{\mathbf{49}}$ ～ $\boxed{\mathbf{51}}$ の答えは順に ⑦, ⑧, ⑨ となる．

(2) $(*)$ の解 $y=D_1e^{-x}+D_2e^{3x}+e^x$ に対して，$y'=-D_1e^{-x}+3D_2e^{3x}+e^x$ であり

$$y(0)=D_1+D_2+1=0,\ \ y'(0)=-D_1+3D_2+1=10$$

のとき，$D_1=-3,\ D_2=2$ であるので $A=-3,\ B=1,\ C=2$ である．したがって，$\boxed{\mathbf{52}}$ ～ $\boxed{\mathbf{54}}$ の答えは順に ⑧, ①, ② となる．

第4分野　確率・統計

〔問1～問4：解答番号 $\boxed{\mathbf{55}}$ ～ $\boxed{\mathbf{73}}$ 〕

(注意)　事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問1　(1)　確率変数 X, Y が独立で，確率分布がともに

X の値（Y の値）	-3	-2	0	1	3
確率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$

(a は定数)

で与えられているとき，$E(X) = E(Y) = \boxed{\mathbf{55}}$，$V(X) = V(Y) = \boxed{\mathbf{56}}$ である．また

$$V\left(\frac{X+Y}{2}+3\right) = \boxed{\mathbf{57}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{55}}$ ～ $\boxed{\mathbf{57}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ -1　⑦ $\frac{1}{2}$　⑧ $\frac{3}{2}$　⑨ $\frac{5}{2}$　ⓐ $\frac{7}{2}$　ⓑ $\frac{11}{2}$

ⓒ $-\frac{1}{3}$　ⓓ $\frac{1}{3}$　ⓔ $\frac{1}{4}$　ⓕ $\frac{3}{4}$　ⓖ $\frac{5}{4}$　ⓗ $\frac{17}{4}$

(2)　2つの機械 A, B があり，それぞれの使用開始から故障までの時間を確率変数 X, Y で表す．またそれらの分布関数を

$$F(t) = P(X \leqq t), \qquad G(t) = P(Y \leqq t)$$

とおく．いま A と B を組み合わせてできる装置 S の故障について考える．ただし A と B は互いに影響を与えない，すなわち X, Y は独立とする．

(i)　A, B が両方とも故障してはじめて S が故障するとする．このとき，S の使用開始から故障までの時間が t 以下である確率は $\boxed{\mathbf{58}}$ である．

(ii)　A, B の少なくとも一方が故障したとき S が故障するとする．このとき，S の使用開始から故障までの時間が t 以下である確率は $\boxed{\mathbf{59}}$ である．

$\boxed{\mathbf{58}}$ ・ $\boxed{\mathbf{59}}$ の解答群

⓪ $F(t)+G(t)$	① $\lvert F(t)-G(t)\rvert$	② $F(t)$
③ $F(t)+G(t)-F(t)G(t)$	④ $F(t)G(t)$	⑤ $G(t)$
⑥ $F(t)+G(t)+F(t)G(t)$	⑦ $\dfrac{G(t)}{F(t)}$	⑧ $\dfrac{F(t)}{G(t)}$

解説

(1)　まず

$$E(X)=E(Y)=\frac{1}{12}\cdot(-3)+\frac{1}{6}\cdot(-2)+a\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{12}\cdot 3=0$$

より，$\boxed{\mathbf{55}}$ の答えは ⓪ となる．これを用いると

$$\begin{aligned}V(X)=V(Y)&=E\left((X-E(X))^2\right)=E(X^2)\\&=\frac{1}{12}\cdot(-3)^2+\frac{1}{6}\cdot(-2)^2+a\cdot 0^2+\frac{1}{3}\cdot 1^2+\frac{1}{12}\cdot 3^2\\&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

より，$\boxed{\mathbf{56}}$ の答えは ⑨ となる．さらに X, Y が独立であるため，$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ が成り立つから

$$V\left(\frac{X+Y}{2}+3\right)=\frac{1}{2^2}V(X+Y)=\frac{1}{2^2}\left(V(X)+V(Y)\right)=\frac{1}{2}V(X)=\frac{5}{4}$$

より，$\boxed{\mathbf{57}}$ の答えは ⓖ となる．

なお，確率の合計が 1 であることから

$$a=1-\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{3}$$

のように a の値を求めることができるが，本問では結果的にその必要はない．

(2) A, B が使用開始から時刻 t までに故障するという事象を，それぞれ C, D とおく．このとき

$$P(X \leqq t) = P(C) \quad \text{and} \quad P(Y \leqq t) = P(D)$$

が成り立つ．

(i) A, B が両方とも故障してはじめて S が故障するという状況を考えよう．このとき S が使用開始から故障までの時間が t 以下であるための必要十分条件は “$X \leqq t$ かつ $Y \leqq t$” となることである．したがって求める確率は $P(X \leqq t$ かつ $Y \leqq t)$ であり，X, Y が独立であることから

$$\begin{aligned} P(X \leqq t \text{ かつ } Y \leqq t) &= P(C \cap D) \\ &= P(C)P(D) \\ &= P(X \leqq t)P(Y \leqq t) \\ &= F(t)G(t) \end{aligned}$$

となる．したがって $\boxed{\mathbf{58}}$ の答えは ④ である．

(ii) 今度は A, B の少なくとも一方が故障したとき S が故障するという状況を考えよう．このとき S が使用開始から故障までの時間が t 以下であるための必要十分条件は “$X \leqq t$ または $Y \leqq t$” となることである．したがって求める確率は $P(X \leqq t$ または $Y \leqq t)$ であり，X, Y が独立であることから

$$\begin{aligned} &P(X \leqq t \text{ または } Y \leqq t) \\ &= P(C \cup D) \\ &= P(C) + P(D) - P(C \cap D) \\ &= P(C) + P(D) - P(C)P(D) \\ &= P(X \leqq t) + P(Y \leqq t) - P(X \leqq t \text{ かつ } Y \leqq t) \\ &= F(t) + G(t) - F(t)G(t) \end{aligned}$$

となる．したがって $\boxed{\mathbf{59}}$ の答えは ③ である．

問 2　a を定数とする．確率変数 X の確率密度関数 $f_X(x)$ が

$$f_X(x) = \begin{cases} ax & (0 \leqq x \leqq 5) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 5) \end{cases}$$

で与えられている．

(1)　確率の性質から $a = \boxed{\textbf{60}}$ である．また，X の分布関数を $F_X(x) = P(X \leqq x)$ とすると

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \boxed{\textbf{61}} & (0 \leqq x \leqq 5) \\ 1 & (x > 5) \end{cases}$$

と表せる．

$\boxed{\textbf{60}}$ の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{1}{5}$　② $\dfrac{2}{5}$　③ $\dfrac{1}{25}$　④ $\dfrac{2}{25}$　⑤ 1

$\boxed{\textbf{61}}$ の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{1}{5}x$　② $\dfrac{2}{5}x$　③ $\dfrac{1}{25}x$　④ $\dfrac{2}{25}x$　⑤ x

⑥ $\dfrac{1}{2}x^2$　⑦ $\dfrac{1}{5}x^2$　⑧ $\dfrac{1}{10}x^2$　⑨ $\dfrac{1}{25}x^2$　ⓐ $\dfrac{1}{50}x^2$

(2)　確率変数 $Y = X^2 + 1$ に対して，Y の分布関数を $F_Y(y)$ とする．$y \geqq 1$ のとき $F_Y(y) = P(Y \leqq y) = P(X \leqq \boxed{\textbf{62}}) = F_X(\boxed{\textbf{62}})$ より

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & (y < 1) \\ \boxed{\textbf{63}} & (1 \leqq y \leqq 26) \\ 1 & (y > 26) \end{cases}$$

である．また，Y の確率密度関数 $f_Y(y)$ は $1 < y < 26$ において

$$f_Y(y) = \boxed{\mathbf{64}}$$

となる．

62 ・ **63** の解答群

⓪ $y+1$	① $y-1$	② $\frac{1}{25}(y+1)$	③ $\frac{1}{25}(y-1)$
④ $(y+1)^2$	⑤ $(y-1)^2$	⑥ $\frac{1}{25}(y+1)^2$	⑦ $\frac{1}{25}(y-1)^2$
⑧ $\sqrt{y+1}$	⑨ $\sqrt{y-1}$	ⓐ $\frac{1}{25}\sqrt{y+1}$	ⓑ $\frac{1}{25}\sqrt{y-1}$

64 の解答群

⓪ 0	① $\frac{1}{25}$	② $\frac{2}{25}$	③ 1
④ $2(y+1)$	⑤ $2(y-1)$	⑥ $\frac{2}{25}(y+1)$	⑦ $\frac{2}{25}(y-1)$
⑧ $\frac{1}{2\sqrt{y+1}}$	⑨ $\frac{1}{2\sqrt{y-1}}$	ⓐ $\frac{1}{50\sqrt{y+1}}$	ⓑ $\frac{1}{50\sqrt{y-1}}$

解説

(1) 確率密度関数の基本的性質より

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt = \int_0^5 at\,dt = a\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^5 = \frac{25}{2}a$$

が成り立つ．したがって，$a = \frac{2}{25}$ となるから， **60** の答えは ④ である．

次に $0 \leqq x \leqq 5$ のとき，確率変数 X の分布関数は

$$F_X(x) = P(X \leqq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_0^x \frac{2}{25}t\,dt = \left[\frac{1}{25}t^2\right]_0^x = \frac{1}{25}x^2$$

となる．よって， **61** の答えは ⑨ である．

(2) $y \geqq 1$ のとき，不等式 $Y \leqq y$ は次のように式変形できる．

$$Y \leqq y \iff X^2+1 \leqq y \iff X^2 \leqq y-1 \iff -\sqrt{y-1} \leqq X \leqq \sqrt{y-1}$$

一方，$P(X < -\sqrt{y-1}) = 0$ であることに注意すると，確率の性質より

$$\begin{aligned}
&P(-\sqrt{y-1} \leqq X \leqq \sqrt{y-1}) \\
&= P(-\sqrt{y-1} \leqq X \leqq \sqrt{y-1}) + P(X < -\sqrt{y-1}) \\
&= P(X \leqq \sqrt{y-1})
\end{aligned}$$

となる．以上より，$F_Y(y) = P(Y \leqq y) = P(X \leqq \sqrt{y-1}) = F_X(\sqrt{y-1})$ であり，$\boxed{\mathbf{62}}$ の答えは ⑨ である．また，$1 \leqq y \leqq 26$ のとき $0 \leqq \sqrt{y-1} \leqq 5$ なので (1) の結果から

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y-1}) = \frac{1}{25}\left(\sqrt{y-1}\right)^2 = \frac{1}{25}(y-1)$$

となる．したがって，$\boxed{\mathbf{63}}$ の答えは ③ である．さらに，$1 < y < 26$ のとき

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{25}$$

である．よって，$\boxed{\mathbf{64}}$ の答えは ① となる．

※ $F_Y(y)$ は $y=1$ および $y=26$ でともに微分不可能であるため，$f_Y(y)$ は $y=1,26$ において定義されない．

問 3　原点 O から出発し，数直線上を移動する点 A がある．点 A は 1 回ごとに，確率 p で正の向きに 3 移動し，確率 $1-p$ で負の向きに 1 移動する．16 回移動した後の点 A の座標を X とおくとき，X の平均が $E(X)=8$ となるように p の値を定めたい．
16 回の移動の中で正の向きに移動した回数を Y とおけば $X=$ $\boxed{\mathbf{65}}$ が成り立つ．
また，Y は二項分布 $B(16,p)$ に従うから $E(Y)=$ $\boxed{\mathbf{66}}$ である．したがって $E(X)=8$ より $p=$ $\boxed{\mathbf{67}}$ であり，このとき，X の標準偏差は $D(X)=$ $\boxed{\mathbf{68}}$ である．

$\boxed{\mathbf{65}}$ の解答群

⓪ 0　① Y　② $2Y$　③ $3Y$　④ $4Y$

⑤ 8　⑥ $Y+8$　⑦ $Y-8$　⑧ $2Y+16$　⑨ $2Y-16$

ⓐ $3Y+16$　ⓑ $3Y-16$　ⓒ $4Y+16$　ⓓ $4Y-16$

$\boxed{\mathbf{66}}$ の解答群

⓪ 0　① 4　② 8　③ 16

④ $8p$　⑤ $8(1-p)$　⑥ $8p(1-p)$　⑦ $2\sqrt{2p(1-p)}$

⑧ $16p$　⑨ $16(1-p)$　ⓐ $16p(1-p)$　ⓑ $4\sqrt{p(1-p)}$

$\boxed{\mathbf{67}}$ の解答群

⓪ 0　① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{5}{6}$　⑤ $\frac{3}{8}$　⑥ $\frac{5}{8}$

⑦ $\frac{7}{8}$　⑧ $\frac{3}{10}$　⑨ $\frac{5}{10}$　ⓐ $\frac{7}{10}$　ⓑ $\frac{5}{12}$　ⓒ $\frac{7}{12}$　ⓓ $\frac{11}{12}$

$\boxed{\mathbf{68}}$ の解答群

⓪ 0　① $\sqrt{3}$　② $\sqrt{5}$　③ $\sqrt{7}$　④ $\sqrt{11}$　⑤ $\sqrt{15}$

⑥ $2\sqrt{3}$　⑦ $2\sqrt{5}$　⑧ $2\sqrt{7}$　⑨ $2\sqrt{11}$　ⓐ $2\sqrt{15}$

ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　ⓒ $\frac{\sqrt{5}}{2}$　ⓓ $\frac{\sqrt{7}}{2}$　ⓔ $\frac{\sqrt{11}}{2}$　ⓕ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

解説

確率変数の期待値，分散についての公式

$$E(aX+b)=aE(X)+b,\quad V(aX+b)=a^2V(X)$$

を思い出しておこう．また二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数の期待値，分散はそれぞれ np, $np(1-p)$ であった．

さて点 A が 16 回移動したうちで, 正の向きに移動した回数を Y と置くと, 負の向きに移動した回数は $16-Y$ であるから $X=3Y-(16-Y)=4Y-16$ である．したがって $\boxed{\textbf{65}}$ の答えは ⓓ である.

Y は二項分布 $B(16,p)$ に従うので, $E(Y)=16p$ より $\boxed{\textbf{66}}$ の答えは ⑧ であり，$E(X)=E(4Y-16)=4E(Y)-16=4\cdot16p-16=8$ となる．よって $p=\dfrac{3}{8}$ となり，$\boxed{\textbf{67}}$ の答えは ⑤ である.

また Y の分散は $V(Y)=16p(1-p)=\dfrac{15}{4}$ であり，$V(X)=V(4Y-16)=4^2V(Y)=4\cdot15$ となる．よって標準偏差は $D(X)=\sqrt{V(X)}=2\sqrt{15}$ である．したがって $\boxed{\textbf{68}}$ の答えは ⓐ である.

問 4 ある測量機器を用いて 2 点 A, B 間の距離を測定する．測定回数 n を $n = 9$ としたところ，測定値の平均は 100 m であった．各回の距離の測定値には誤差が含まれる．ここで，誤差とは測定値から真の距離を引いた値を指し，各回の誤差は独立であるとする．また，誤差は平均 0 m，標準偏差 0.009 m の正規分布 $N(0, 0.009^2)$ に従うと仮定する．このとき，A, B 間の真の距離 μ m の，信頼度 95%での信頼区間を求めたい．

まず，k 回目 $(k = 1, 2, \ldots, 9)$ の測定値を表す確率変数を X_k とおくと，X_k は正規分布 $N\left(\boxed{\textbf{69}}, 0.009^2\right)$ に従う．したがって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_9}{9}$$

は正規分布 $N\left(\boxed{\textbf{69}}, \boxed{\textbf{70}}\right)$ に従う．そこで

$$Z = \frac{\overline{X} - \boxed{\textbf{69}}}{\boxed{\textbf{71}}}$$

とおけば，Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である．正規分布表によれば

$$P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

であることがわかるので

$$P\left(\overline{X} - \boxed{\textbf{72}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + \boxed{\textbf{72}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

が成り立つ．以上より，求める信頼区間は

$$\left[100 - \boxed{\textbf{72}}, 100 + \boxed{\textbf{72}}\right]$$

であり，その幅は $2 \times \boxed{\textbf{72}}$ である．なお，同じ状況で測定回数 n のみを変えて，信頼区間の幅を 0.01 未満とするための最小の測定回数は $\boxed{\textbf{73}}$ 回である．

$\boxed{\textbf{69}}$ の解答群

⓪ 0	① 3	② 9	③ 81	④ 95
⑤ 100	⑥ 0.009	⑦ 0.95	⑧ $\frac{100}{9}$	⑨ $\frac{\mu}{9}$
ⓐ μ	ⓑ 9μ	ⓒ $\mu + 100$	ⓓ $\mu - 100$	ⓔ $-\mu + 100$

$\boxed{\mathbf{70}}$ ・ $\boxed{\mathbf{71}}$ の解答群

⓪ 0	① 9	② 100	③ 0.003
④ 0.009	⑤ 3×0.009	⑥ 9×0.009	⑦ $\dfrac{0.009^2}{9}$
⑧ $\dfrac{0.009^2}{3}$	⑨ 0.009^2	ⓐ 3×0.009^2	ⓑ 9×0.009^2

$\boxed{\mathbf{72}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1.96}{0.003}$	① 1.96×0.003	② 1.96×0.003^2	③ 1.96×3
④ $\dfrac{1.96}{0.009}$	⑤ 1.96×0.009	⑥ 1.96×0.009^2	⑦ 1.96×9

$\boxed{\mathbf{73}}$ の解答群

⓪ 10	① 11	② 12	③ 13	④ 14
⑤ 15	⑥ 16	⑦ 17	⑧ 18	⑨ 19

解説

k 回目の測定値 X_k は，k によらない真の距離 μ と正規分布 $N(0, 0.009^2)$ に従う誤差の和であるから，正規分布 $N(\mu, 0.009^2)$ に従う．したがって，$\boxed{\mathbf{69}}$ の答えは ⓐ となる．加えて，各回の誤差は独立であるから，n 回の測定値の標本平均を

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

とおくと，$\overline{X_n}$ は正規分布 $N\left(\mu, \dfrac{0.009^2}{n}\right)$ に従う．また

$$Z_n = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sqrt{\frac{0.009^2}{n}}}$$

とおくと，Z_n は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．さらに

$$P\left(-1.96 \leqq Z_n = \frac{\overline{X_n} - \mu}{\sqrt{\frac{0.009^2}{n}}} \leqq 1.96\right) \fallingdotseq 0.95$$

より

$$P\left(\overline{X_n} - 1.96\sqrt{\frac{0.009^2}{n}} \leqq \mu \leqq \overline{X_n} + 1.96\sqrt{\frac{0.009^2}{n}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

であるから，$\overline{X_n}$ の実現値が 100 のとき，求める信頼区間は

$$\left[100 - 1.96\sqrt{\frac{0.009^2}{n}},\ 100 + 1.96\sqrt{\frac{0.009^2}{n}}\right]$$

となる．

　以上をもとに $n = 9$ の場合を考えると，$\boxed{\textbf{70}}$ の答えは ⑦，$\boxed{\textbf{71}}$ の答えは

$$\sqrt{\frac{0.009^2}{9}} = \frac{0.009}{3} = 0.003$$

より ③，$\boxed{\textbf{72}}$ の答えは

$$1.96\sqrt{\frac{0.009^2}{9}} = 1.96 \times 0.003$$

より ① となる．また，信頼区間の幅を 0.01 未満とするための最小の測定回数は

$$2 \times 1.96\sqrt{\frac{0.009^2}{n}} < 0.01$$

を n について解いて

$$n > \frac{0.009^2}{\left(\frac{0.01}{2 \times 1.96}\right)^2} = 12.44\cdots$$

より 13 回であり，$\boxed{\textbf{73}}$ の答えは ③ となる．