

# EMaT

## 工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2017年12月9日（土）

4分野受験 午後1時30分～午後4時10分

3分野受験 午後1時30分～午後3時30分

2分野受験 午後1時30分～午後2時50分

1分野受験 午後1時30分～午後2時10分

\* 受験分野は、各大学・高専の指示に従ってください。

### 受験上の注意

- (1) 机の右上に学生証を提示すること。
- (2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
- (3) 問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁、解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
- (4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること。
- (5) 解答用紙を汚損したときは手を挙げて監督者に知らせること。
- (6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが、どのページも切り離さないこと。
- (7) 試験開始 40 分後から退室を認める。
- (8) 問題冊子は持ち帰ること。
- (9) 気分が悪くなった場合は、手を挙げて監督者に知らせること。
- (10) その他、監督者の指示に従うこと。

## 解答上の注意

- (1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び、その記号を解答用紙にマークすること。ただし、解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には⑩をマークすること。例えば、**23** と表示してある問いに対して解答記号Ⓒを選ぶ場合は、次のようにマークすること。

23	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ	Ⓕ	Ⓖ	Ⓗ	Ⓘ	Ⓚ	●	Ⓛ	Ⓜ	Ⓨ	Ⓩ	ⓐ	ⓑ	Ⓒ	Ⓓ	Ⓔ	Ⓕ	Ⓖ	Ⓗ	Ⓘ
----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

- (2) 破線で囲まれた番号は、前に現れた番号であることを表す。したがって、例えば **23** には **23** と同じ解答が入る。
- (3) 解答が数式の場合、**23** は (**23**) という意味である。したがって、例えば **23** の解答が  $-x-1$  の場合、 $x^2 - \mathbf{23}$  は  $x^2 - (-x-1)$  を意味する。
- (4)  $\mathbb{R}$  は実数全体の集合とする。
- (5)  $\log x$  は  $x$  の自然対数とする。

## 目次

第1分野	微分積分	.....	3
第2分野	線形代数	.....	15
第3分野	常微分方程式	.....	25
第4分野	確率・統計	.....	37

# 第1分野 微分積分

[ 問 1 ~ 問 6 : 解答番号  ~  ]

(注意)  $\sin^{-1} x$ ,  $\cos^{-1} x$ ,  $\tan^{-1} x$  は, それぞれ  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$  の逆関数を表し,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ,  $\arctan x$  と書き表されることもある. 各逆関数がかかる値の範囲 (値域) は,  $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$  とする.

問 1 次の2つの極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - (x+1)}{x-2} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin x}{x} = \boxed{2}$$

・  の解答群

- |             |      |      |                  |                  |                  |
|-------------|------|------|------------------|------------------|------------------|
| ① 0         | ② 1  | ③ 2  | ④ $\frac{1}{2}$  | ⑤ $\frac{3}{4}$  | ⑥ $\frac{5}{6}$  |
| ⑦ $\infty$  | ⑧ -1 | ⑨ -2 | ⑩ $-\frac{1}{2}$ | Ⓐ $-\frac{3}{4}$ | Ⓑ $-\frac{5}{6}$ |
| Ⓒ $-\infty$ |      |      |                  |                  |                  |

### 解説

最初の問題は、 $x \rightarrow 2$ としたとき、分子と分母ともに0に収束する  $\frac{0}{0}$  の不定形のタイプである。分子と分母に  $\sqrt{x+7}+x+1$  をかけて整理すると

$$\frac{\sqrt{x+7}-(x+1)}{x-2} = \frac{-(x-2)(x+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+x+1)} = \frac{-(x+3)}{\sqrt{x+7}+x+1}$$

と変形でき

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-(x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+3)}{\sqrt{x+7}+x+1} = -\frac{5}{6}$$

を得る。したがって、1 の答えは b である。または、ロピタルの定理を用いて

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-(x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{2}(x+7)^{-\frac{1}{2}}-1}{1} = -\frac{5}{6}$$

としても容易に求められる。

次の問題については、不定形ではないのでロピタルの定理は使えないことに注意したい。  
 $0 \leq 1 - \sin x \leq 2$  より、 $0 \leq \frac{1 - \sin x}{x} \leq \frac{2}{x}$  (ただし  $x > 0$ ) であるから

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0$$

がわかる。すなわち

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$$

である。したがって、2 の答えは c である。

**問 2** 不定積分  $I = \int \frac{\tan x}{1 + \cos^2 x} dx$  を計算する.

$\tan x = t$  とおいて, その両辺を  $t$  で微分すれば,  $\boxed{3} \frac{dx}{dt} = 1$  を得る. 関係式

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$$

を用いれば

$$\frac{dx}{dt} = \boxed{4}, \quad 1 + \cos^2 x = \boxed{5}$$

となる. よって,  $t$  についての積分に変換することができて

$$I = \boxed{6} \quad (\text{積分定数は省略})$$

を得る.

$\boxed{3}$  の解答群

- |                 |              |                      |                        |
|-----------------|--------------|----------------------|------------------------|
| ① 0             | ② 1          | ③ $\tan x$           | ④ $\frac{1}{\tan^2 x}$ |
| ⑤ $\cos^{-1} x$ | ⑥ $\cos^2 x$ | ⑦ $\frac{1}{\cos x}$ | ⑧ $\frac{1}{\cos^2 x}$ |

$\boxed{4} \cdot \boxed{5}$  の解答群

- |                       |                             |                       |                         |
|-----------------------|-----------------------------|-----------------------|-------------------------|
| ① $t$                 | ② $1 + t$                   | ③ $\frac{1}{1 + t^2}$ | ④ $\sqrt{1 + t^2}$      |
| ⑤ $\frac{2}{1 + t^2}$ | ⑥ $\frac{2 + t^2}{1 + t^2}$ | ⑦ $\frac{1}{t}$       | ⑧ $\frac{t^2}{2 + t^2}$ |

$\boxed{6}$  の解答群

- |                               |                                    |   |
|-------------------------------|------------------------------------|---|
| ① $\frac{1}{2}x$              | ② $\frac{1}{2} \tan^{-1} x$        | ③ $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \log(1 + \tan^2 x)$ |
| ④ $\frac{1}{2} \tan^2 x$      | ⑤ $\frac{1}{1 + x^2}$              | ⑥ $\frac{1}{2} \log(1 + \tan^2 x)$                |
| ⑦ $\frac{1}{2} \log(2 + x^2)$ | ⑧ $\frac{1}{2} \log(2 + \tan^2 x)$ |   |

### 解説

不定積分  $I$  は  $t = \tan x$  と置くことにより,  $t$  についての有理関数の不定積分に帰着できる.  $\tan x = t$  の両辺を  $t$  で微分すると  $\frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{dt} = 1$  なので,  $\boxed{3}$  の答えは  $\textcircled{7}$  である.

ここで,  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$ ,  $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$  より

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}, \quad 1 + \cos^2 x = \frac{2+t^2}{1+t^2},$$

がわかる. よって,  $\boxed{4}$  と  $\boxed{5}$  の答えはそれぞれ  $\textcircled{2}$  と  $\textcircled{5}$  である. 以上より

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\tan x}{1 + \cos^2 x} dx = \int \frac{t}{\frac{2+t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(2+t^2)'}{2+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \log(2+t^2) = \frac{1}{2} \log(2 + \tan^2 x) \quad (\text{積分定数は省略}) \end{aligned}$$

となり,  $\boxed{6}$  の答えは  $\textcircled{7}$  である.

問3 双曲線関数  $\sinh x$ ,  $\cosh x$  は  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  により定義される.

(1)  $\frac{d}{dx} \sinh x = \boxed{7}$  である.

**7** の解答群

- ①  $\cos^{-1} x$     ②  $\sinh x$     ③  $-\sinh x$     ④  $\cosh x + \sinh x$   
 ⑤  $\sin^{-1} x$     ⑥  $\cosh x$     ⑦  $-\cosh x$     ⑧  $\cosh x - \sinh x$

(2)  $\sinh x$  の逆関数を  $y = \sinh^{-1} x$  と表すとき,  $x = \sinh y$  なので

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

となる. ここで,  $t = e^y$  とおくと,  $t$  についての2次方程式  $t^2 - 2xt - 1 = 0$  を得る.  $t > 0$  であることに注意してこれを解くと,  $t = \boxed{8}$  である. よって,  $y = \boxed{9}$  を得る.

**8** ・ **9** の解答群

- ①  $1 + \sqrt{x^2 + 1}$     ②  $\log(1 + \sqrt{x^2 + 1})$     ③  $e^{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$   
 ④  $x + \sqrt{x^2 + 1}$     ⑤  $\log(x + \sqrt{x^2 + 1})$     ⑥  $e^{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

(3) (2) より

$$\frac{d}{dx} \sinh^{-1} x = \frac{d}{dx} \boxed{9} = \boxed{10}$$

である.

**10** の解答群

- ①  $\frac{x}{x^2 + 1 + \sqrt{x^2 + 1}}$     ②  $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$     ③  $1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$   
 ④  $\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} e^{x + \sqrt{x^2 + 1}}$     ⑤  $\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$     ⑥  $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$



## 解説

- (1) 双曲線関数  $\sinh x$  の微分は、定義より

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \frac{d}{dx} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

であるので、**7** の答えは **5** である。ちなみに、 $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x \geq 1 > 0$  を示すことができるので、 $\sinh x$  は狭義単調増加である。よって、 $x$  の値と  $\sinh x$  の値は 1 対 1 に対応し、 $\sinh x$  の逆関数  $\sinh^{-1} x$  が定義できる。その定義域は  $-\infty < x < \infty$  である。

- (2)  $y = \sinh^{-1} x$  とおくと  $x = \sinh y$  なので、 $t = e^y$  とおくと  $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{t - t^{-1}}{2}$  である。これを変形して得られる 2 次方程式  $t^2 - 2xt - 1 = 0$  を解くと  $t = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$  となる。ここで  $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|$  より、 $x - \sqrt{x^2 + 1} < x - |x| \leq 0$  であることがわかる。一方、 $t = e^y > 0$  なので  $t = x - \sqrt{x^2 + 1}$  とはならない。よって、 $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$  となり、**8** の答えは **3** である。 $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$  より  $y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$  を得るので、**9** の答えは **4** である。

- (3) (2) により

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sinh^{-1} x &= \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)(x - \sqrt{x^2 + 1})}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})} \\ &= \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - (x^2 + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$

がわかる。以上より、**10** の答えは **1** である。

問4 関数  $\frac{1}{1-t}$  のマクローリン展開 ( $t=0$  を中心とするテイラー展開) は

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots \quad (-1 < t < 1)$$

である. このことから  $\frac{1}{1+x^2}$  のマクローリン展開は

$$\frac{1}{1+x^2} = \boxed{11} \quad (-1 < x < 1)$$

である. また,  $\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+s^2} ds$  を用いれば

$$\tan^{-1} x = \boxed{12} \quad (-1 < x < 1)$$

となり,  $\tan^{-1} x$  のマクローリン展開を得る.

**11** の解答群

- |  |   |
|--|---|
| ① $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$    | ① $1 - x^2 - x^4 - x^6 - x^8 - \dots$                             |
| ② $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$    | ③ $1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$                             |
| ④ $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$ | ⑤ $1 - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - \dots$                             |
| ⑥ $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$  | ⑦ $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$ |

**12** の解答群

- |   |   |
|---|---|
| ① $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$                            | ① $x - 2x^3 + 4x^5 - 6x^7 + \dots$                            |
| ② $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ | ③ $x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} - \dots$ |
| ④ $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ | ⑤ $3x + 6x^2 + 12x^3 + 24x^4 + \dots$                         |
| ⑥ $x + 3x^3 + 5x^5 + 7x^7 + \dots$                            | ⑦ $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$ |

**解説**

関数  $\frac{1}{1-t}$  のマクローリン展開は  $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$  ( $-1 < t < 1$ ) なので、この両辺に  $t = -x^2$  を代入すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} &= 1 + (-x^2) + (-x^2)^2 + (-x^2)^3 + (-x^2)^4 + \dots \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots \quad (-1 < x < 1)\end{aligned}$$

となる。したがって、**11** の答えは ③ である。さらに、 $\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+s^2} ds$  を用いれば

$$\begin{aligned}\tan^{-1} x &= \int_0^x \frac{1}{1+s^2} ds \\ &= \int_0^x 1 ds - \int_0^x s^2 ds + \int_0^x s^4 ds - \int_0^x s^6 ds + \dots \\ &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots \quad (-1 < x < 1)\end{aligned}$$

となるので、**12** の答えは ④ である。

**問 5** 1変数関数  $f(x), g(x)$  は微分可能で、その導関数  $f'(x), g'(x)$  は連続であるとする。  
 また、2変数関数  $h(t, s)$  は偏微分可能で、 $\frac{\partial h}{\partial t}(t, s), \frac{\partial h}{\partial s}(t, s)$  はともに連続であるとする。  
 このとき、合成関数  $z = f(h(t, s))$  の  $t$  に関する偏導関数は

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \boxed{13}$$

である。また、合成関数  $w = h(f(x), g(x))$  の導関数は

$$\frac{dw}{dx} = \boxed{14}$$

である。

**13** ・ **14** の解答群

- |   |   |
|---|---|
| ① $f'(0) \frac{\partial h}{\partial t}(t, s)$   | ① $f'(0) \frac{\partial h}{\partial s}(t, s)$                 |
| ② $f'(h(t, s)) \frac{\partial h}{\partial t}(t, s)$   | ③ $\frac{\partial h}{\partial t}(f(x), g(x)) f'(x)$           |
| ④ $f'(h(t, s)) \frac{\partial h}{\partial s}(t, s)$   | ⑤ $\frac{\partial h}{\partial s}(f(x), g(x)) (f'(x) + g'(x))$ |
| ⑥ $\frac{\partial h}{\partial t}(f(x), g(x)) (f'(x) + g'(x))$   | ⑦ $\frac{\partial h}{\partial s}(f(x), g(x)) g'(x)$           |
| ⑧ $\frac{\partial h}{\partial t}(f(x), g(x)) (f'(x) + g'(x)) + \frac{\partial h}{\partial s}(f(x), g(x)) (f'(x) + g'(x))$ |   |
| ⑨ $\frac{\partial h}{\partial t}(f(x), g(x)) f'(x) + \frac{\partial h}{\partial s}(f(x), g(x)) g'(x)$                     |   |
| ⑩ $\frac{\partial h}{\partial t}(f(x), g(x)) f'(0) + \frac{\partial h}{\partial s}(f(x), g(x)) g'(0)$                     |   |

### 解説

関数  $f(x)$  は  $x$  の 1 変数関数であるが，合成関数  $z = f(h(t, s))$  を考えると，これは  $t$  と  $s$  の 2 変数関数である．合成関数の偏微分公式より

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f'(h(t, s)) \frac{\partial h}{\partial t}(t, s), \quad \frac{\partial z}{\partial s} = f'(h(t, s)) \frac{\partial h}{\partial s}(t, s)$$

である．したがって，**13** の答えは ② である．また， $h(t, s)$  は 2 変数関数であるが， $t = f(x)$ ,  $s = g(x)$  とすると，合成関数  $w = h(f(x), g(x))$  は  $x$  の 1 変数関数である．合成関数の微分公式より

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial h}{\partial t}(f(x), g(x))f'(x) + \frac{\partial h}{\partial s}(f(x), g(x))g'(x)$$

であるので，**14** の答えは ⑨ である．

問6  $xy$  平面上の集合  $D$  が

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y \right\}$$

で与えられているとき、重積分

$$I = \iint_D \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx dy$$

の値を求める。

(1)  $I$  は

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \int_0^{\boxed{15}} \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx \right) dy$$

と表される。

**15** の解答群

- |                 |       |           |           |
|-----------------|-------|-----------|-----------|
| ① $\frac{1}{2}$ | ② $1$ | ③ $y - x$ | ④ $y$     |
| ⑤ $\frac{x}{y}$ | ⑥ $x$ | ⑦ $x - y$ | ⑧ $1 - y$ |

(2)  $I_1(y) = \int_0^{\boxed{15}} \frac{1}{x^2 + y^2} dx$  とおくと、 $I_1(y) = \frac{\boxed{16}}{y}$  である。

**16** の解答群

- |                      |          |                   |                       |
|----------------------|----------|-------------------|-----------------------|
| ① $\frac{1}{4}$      | ② $\pi$  | ③ $\frac{\pi}{4}$ | ④ $1 - \frac{\pi}{4}$ |
| ⑤ $\frac{\log 2}{2}$ | ⑥ $2\pi$ | ⑦ $\frac{\pi}{2}$ | ⑧ $\frac{\pi}{2} - 1$ |

(3) (1), (2) より

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 y^3 I_1(y) dy = \boxed{17}$$

を得る.

**17** の解答群

- |                     |   |                     |                         |
|---------------------|---|---------------------|-------------------------|
| ① 1                 | ① $-\frac{7}{24}$                               | ② $\frac{7\pi}{12}$ | ③ $\frac{7 \log 2}{48}$ |
| ④ $\frac{\pi}{12}$  | ⑤ $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \frac{7}{24}$ | ⑥ $\frac{7\pi}{96}$ | ⑦ $\frac{\log 2}{3}$    |
| ⑧ $\frac{7\pi}{48}$ | ⑨ $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{7}{24}$ | ⑩ $\frac{7}{96}$    |                         |

**解説**

- (1) 与えられた集合  $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{2} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y \right\}$  は第1象限にあり, 直線  $y = x$  と  $y$  軸および直線  $y = \frac{1}{2}, y = 1$  によって囲まれた領域である. 重積分  $I = \iint_D \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx dy$  は累次積分によって

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \int_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx \right) dy$$

と表すことができる. よって, **15** の答えは③である.

- (2)  $I_1(y)$  の被積分関数の分母を  $y^2$  でくくると

$$I_1(y) = \frac{1}{y^2} \int_0^y \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} dx$$

となる.  $s = \frac{x}{y}$  とおくと,  $dx = y ds$  だから

$$I_1(y) = \frac{1}{y} \int_0^1 \frac{1}{s^2 + 1} ds = \frac{1}{y} (\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0) = \frac{1}{y} \frac{\pi}{4}$$

を得る. よって, **16** の答えは②である.

- (3) (1) と (2) により

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 y^3 I_1(y) dy = \frac{\pi}{4} \int_{\frac{1}{2}}^1 y^2 dy = \frac{7}{96} \pi$$

となるので, **17** の答えは⑥である.

## 第2分野 線形代数

〔 問 1 ～ 問 5 : 解答番号 18 ～ 34 〕

**問 1** 座標空間内に点 A(1, 1, 1), 点 B(5, 2, -1), 点 C(1, 2, 1), 点 D(5, 5, 2) がある.

(1) ベクトル  $\begin{pmatrix} 2 \\ \boxed{18} \\ 4 \end{pmatrix}$  は  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{AC}$  のどちらにも直交する.

(2) 線分 AB, AC, AD を 3 辺とする平行六面体の体積は 19 である.

18 ・ 19 の解答群

- |     |        |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|
| ① 0 | ② 1    | ③ 2    | ④ 3    | ⑤ 4    | ⑥ 5    |
|     | ⑦ 6    | ⑧ 7    | ⑨ 8    | ⑩ 9    | ⑪ a 10 |
|     | ⑫ b 11 | ⑬ c 12 | ⑭ d 13 | ⑮ e 14 | ⑯ f 15 |

**解説**

(1) ベクトル  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{AC}$  の成分を求めると  $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  となる.

18 を  $t$  とおき, 求めるベクトルを  $\vec{X}$  とすると,  $\vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 4 \end{pmatrix}$  である.  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{X} = 0$ ,  
 $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{X} = 0$  を満たすので,  $t = 0$  を得る. したがって, 18 の答えは ① である.

(2) 最も簡単なのは

$$|\overrightarrow{AB} \ \overrightarrow{AC} \ \overrightarrow{AD}| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

のように行列式を用いて求める方法である.



ただ、行列式を用いなくても、下の図を参考に次のように求めることもできる。

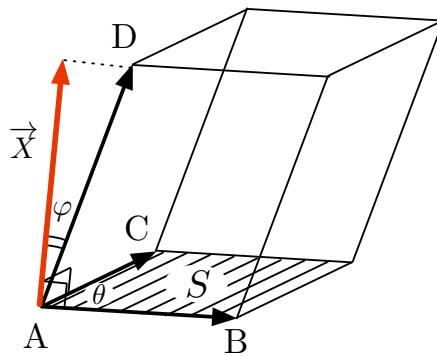
まず、ベクトル  $\vec{AB}$  と  $\vec{AC}$  のなす角を  $\theta$  とし、線分 AB, AC を辺とする平行四辺形の面積を  $S$  とする。  $|\vec{AB}|^2|\vec{AC}|^2 = 21$ ,  $|\vec{AB}||\vec{AC}|\cos\theta = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1$  に注意すると、

$$S^2 = |\vec{AB}|^2|\vec{AC}|^2 \sin^2\theta = |\vec{AB}|^2|\vec{AC}|^2 - |\vec{AB}|^2|\vec{AC}|^2 \cos^2\theta = 20$$

となり、 $S = \sqrt{20}$  を得る。また、(1) により  $|\vec{X}| = \sqrt{20}$  であるので、 $S = |\vec{X}|$  を得る。一方、ベクトル  $\vec{AD}$  と  $\vec{X}$  のなす角を  $\varphi$  とすると、斜線部を底面とする平行六面体の高さは  $|\vec{AD}|\cos\varphi$  である。したがって、求める体積は

$$S|\vec{AD}|\cos\varphi = |\vec{X}||\vec{AD}|\cos\varphi = \vec{X} \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 12$$

である。したがって、**19** の答えは  $\textcircled{c}$  である。



問 2 連立 1 次方程式

$$(*) \quad \begin{cases} x - y - 3z = 2 \\ -x + 2y + 4z = -4 \\ 3x - 2y - 8z = a \end{cases}$$

について考える。ただし、 $a$  は定数とする。

- (1)  $a = \boxed{20}$  のとき、連立方程式 (\*) は解をもつ。  
(2)  $a = \boxed{20}$  のとき、 $x = 2$  とすると、 $y = \boxed{21}$ 、 $z = \boxed{22}$  である。

**20** ~ **22** の解答群

- |     |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|
| ⑩ 0 | ① 1  | ② 2  | ③ 3  | ④ 4  | ⑤ 5  |
|     | ⑥ 6  | ⑦ 7  | ⑧ 8  | ⑨ -1 | Ⓐ -2 |
|     | Ⓑ -3 | Ⓒ -4 | Ⓓ -5 | Ⓔ -6 | Ⓕ -7 |

解説

(1) 係数行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & -8 \end{pmatrix}$  に対する拡大係数行列  $B = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & -8 & a \end{array} \right)$  の基本変形を

$$B \xrightarrow[\substack{2 \text{ 行} + 1 \text{ 行} \\ 3 \text{ 行} - 1 \text{ 行} \times 3}]{\phantom{B}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & a-6 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{1 \text{ 行} + 2 \text{ 行} \\ 3 \text{ 行} - 2 \text{ 行}}]{\phantom{B}} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{array} \right)$$

とできる。  $A$  の階数は  $\text{rank } A = 2$  となるので、連立 1 次方程式が解を持つための必要十分条件は  $\text{rank } B = 2$  である。したがって  $a = 4$  となるので、**20** の答えは ④ である。

(2) (1) において  $a = 4$  として連立 1 次方程式  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$  を解くと、

$x = 2$  のとき、 $y = -3$ 、 $z = 1$  となるので、**21** の答えは ⑥、**22** の答えは ① である。

問3  $a, b, c$  を定数とする. 行列式

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

の値は  $\boxed{23}$   $(a+b+c)^{\boxed{24}}$  である.

$\boxed{23}$  ・  $\boxed{24}$  の解答群

- |      |      |      |      |      |     |
|------|------|------|------|------|-----|
| ① 0  | ② 1  | ③ 2  | ④ 3  | ⑤ 4  | ⑥ 5 |
| ⑦ 6  | ⑧ 7  | ⑨ 8  | ⑩ -1 | Ⓐ -2 |     |
| Ⓑ -3 | Ⓒ -4 | Ⓓ -5 | Ⓔ -6 | Ⓕ -7 |     |

### 解説

与えられた行列式を，例えば1行目と2行目からそれぞれ3行目を引き，それぞれの行から  $a+b+c$  をくくり出し計算して行くと，

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & 0 & -(a+b+c) \\ 0 & a+b+c & -(a+b+c) \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} \\ & = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3 \end{aligned}$$

となるので，**23** の答えは②，**24** の答えは③である。

問4 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$  の対角化を考える.

まず,  $A$  の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} 1-x & -2 & 2 \\ -1 & 1-x & 1 \\ -1 & -2 & 4-x \end{vmatrix} = (1-x)(2-x)(\boxed{25} - x) = 0$$

である. したがって,  $A$  の固有値は 1 と 2 と  $\boxed{25}$  である.

固有値 1 に対する固有ベクトルを求めると  $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \boxed{26} \end{pmatrix}$  である. ただし,  $c_1$  は 0 で

ない任意定数である. 同様に, 固有値 2, 固有値  $\boxed{25}$  に対する固有ベクトルをそれぞれ求めると

$$c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \boxed{27} \end{pmatrix}, \quad c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{28} \\ 1 \end{pmatrix}$$

である. ただし,  $c_2, c_3$  は 0 でない任意定数である.

したがって,  $A$  を対角化する正則行列は

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \boxed{28} \\ \boxed{26} & \boxed{27} & 1 \end{pmatrix}$$

である. 実際

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{25} \end{pmatrix}$$

と確かめられる.

$\boxed{25} \sim \boxed{28}$  の解答群

- |      |      |      |      |      |     |
|------|------|------|------|------|-----|
| ① 0  | ② 1  | ③ 2  | ④ 3  | ⑤ 4  | ⑥ 5 |
| ⑦ 6  | ⑧ 7  | ⑨ 8  | ⑩ -1 | Ⓐ -2 |     |
| Ⓑ -3 | Ⓒ -4 | Ⓓ -5 | Ⓔ -6 | Ⓕ -7 |     |

## 解説

固有方程式を計算すると

$$\begin{vmatrix} 1-x & -2 & 2 \\ -1 & 1-x & 1 \\ -1 & -2 & 4-x \end{vmatrix} = (1-x)(2-x)(3-x)$$

となるので、**25** の答えは **③** である。固有値  $\lambda$  と固有ベクトル  $\boldsymbol{x}$  に対し、連立1次方程式  $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{O}$  が成り立つ。ここで  $E$  は単位行列、 $\boldsymbol{O}$  は零行列である。そこで、 $\lambda = 1$

のときにこの連立1次方程式を解くと  $\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  を得る。ただし、 $c_1$  は0でない任意の

定数である。同様に、 $\lambda = 2$  のときの連立1次方程式の解は  $\boldsymbol{x} = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 、 $\lambda = 3$  のときの

連立1次方程式の解は  $\boldsymbol{x} = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  となる。ただし、 $c_2, c_3$  は0でない任意の定数である。

したがって、**26** と **27** の答えは **①** となり、**28** の答えは **①** である。

**問 5**  $a$  を 0 でない定数とし、行列  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$  とする。3 以上の任意の自然数  $n$  に

対して、 $A^n$  を求める。

$$S = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、 $A = S + T$  で、 $ST = TS$  を満たす。したがって、二項展開ができて

$$A^n = (S + T)^n = S^n + \boxed{29} S^{n-1}T + \boxed{30} S^{n-2}T^2 + \cdots + T^n$$

となる。さらに

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

に注意すると

$$A^n = \begin{pmatrix} \boxed{32} & \boxed{33} & \boxed{34} \\ 0 & \boxed{32} & \boxed{33} \\ 0 & 0 & \boxed{32} \end{pmatrix}$$

となる。

**29 ~ 31 の解答群**

- |           |                   |                      |                      |
|-----------|-------------------|----------------------|----------------------|
| ① 0       | ② 1               | ③ 2                  | ④ $n$                |
| ⑤ $n + 1$ | ⑥ $\frac{n-1}{2}$ | ⑦ $\frac{n(n-1)}{2}$ | ⑧ $\frac{n(n+1)}{2}$ |

**32 ~ 34 の解答群**

- |                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| ① $a^{n-1}$                 | ② $a^n$                     | ③ $a^{n+1}$                 |
| ④ $(n-1)a^n$                | ⑤ $na^{n-1}$                | ⑥ $(n+1)a^{n-1}$            |
| ⑦ $\frac{n(n-1)a^{n+1}}{2}$ | ⑧ $\frac{n(n-1)a^{n-2}}{2}$ | ⑨ $\frac{n(n+1)a^{n-1}}{2}$ |



### 解説

行列  $S$  と  $T$  は可換 ( $ST = TS = aT$ ) なので

$$(S + T)^n = S^n + {}_n C_1 S^{n-1} T + {}_n C_2 S^{n-2} T^2 + \cdots + T^n$$

が成り立つ. ここで  ${}_n C_1 = 1$ ,  ${}_n C_2 = \frac{n(n-1)}{2}$  であるから, **29** の答えは ③, **30** の

答えは ⑥ である. また, 直接計算することで  $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  となるので, **31** の答

えは ① である.  $T^3 = O$  だから,  $T^n = O$  ( $n \geq 3$ ) である事に注意すれば

$$\begin{aligned} A^n &= (S + T)^n = S^n + nS^{n-1}T + \frac{n(n-1)}{2}S^{n-2}T^2 \\ &= (aE)^n + n(aE)^{n-1}T + \frac{n(n-1)}{2}(aE)^{n-2}T^2 \\ &= a^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + na^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る. したがって, **32** の答えは ①, **33** の答えは ④, **34** の答えは ⑦ である.

## 第3分野 常微分方程式

〔 問 1 ～ 問 5 : 解答番号 35 ～ 51 〕

(注意) 各問における  $y$  は  $x$  の関数であり,  $y', y''$  は  $y$  の導関数  $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$  を表す.

問 1 微分方程式

$$y' = -\frac{2}{y}$$

の一般解は

$$y^2 = \text{35} + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

と表される. 特に,  $y(1) = 0$  ならば  $C = \text{36}$  である.

35 の解答群

- |                 |                  |                   |                    |          |           |
|-----------------|------------------|-------------------|--------------------|----------|-----------|
| ① $x$           | ② $-x$           | ③ $2x$            | ④ $-2x$            | ⑤ $4x$   | ⑥ $-4x$   |
| ⑦ $x^2$         | ⑧ $-x^2$         | ⑨ $2x^2$          | ⑩ $-2x^2$          | Ⓐ $4x^2$ | Ⓑ $-4x^2$ |
| Ⓒ $\frac{1}{x}$ | Ⓓ $-\frac{1}{x}$ | Ⓔ $\frac{1}{x^2}$ | Ⓕ $-\frac{1}{x^2}$ |          |           |

36 の解答群

- |      |      |      |      |      |     |
|------|------|------|------|------|-----|
| ① 0  | ② 1  | ③ 2  | ④ 3  | ⑤ 4  | ⑥ 5 |
| ⑦ -1 | ⑧ -2 | ⑨ -3 | ⑩ -4 | Ⓐ -5 |     |

**解説**

本問題の微分方程式  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{y}$  は、形式的に  $y dy = -2 dx$  と書ける変数分離形である。

その両辺を積分した  $\int y dy = -\int 2 dx$  により、一般解

$$\frac{y^2}{2} = -2x + C_1 \quad (C_1 \text{は任意定数})$$

を得る。ゆえに、 $y^2 = -4x + C$  ( $C = 2C_1$ ) であるから、**35** の答えは⑤である。さらに、 $y(1) = 0$  を満たすときは  $-4 + C = 0$  が成り立つので、 $C = 4$  である。したがって、

**36** の答えは④である。

問 2 微分方程式

$$(a) \quad x^2 + y^2 = 2xyy'$$

について考える.

(1)  $y = x \cdot u(x)$  を (a) に代入すると,  $u(x)$  に関する微分方程式

$$(b) \quad u' = \boxed{37}$$

が導かれる.

**37** の解答群

- |                      |                       |                          |                          |
|----------------------|-----------------------|--------------------------|--------------------------|
| ① $\frac{1+u^2}{2u}$ | ② $\frac{1+u^2}{2xu}$ | ③ $\frac{1+3u^2}{2u}$    | ④ $\frac{1+3u^2}{2xu}$   |
| ⑤ $\frac{1-u^2}{2u}$ | ⑥ $\frac{1-u^2}{2xu}$ | ⑦ $\frac{u^3}{2(1+u^2)}$ | ⑧ $\frac{u^3}{2(1-u^2)}$ |

(2) (b) の一般解は

$$(c) \quad \boxed{38} = C \quad (C \text{ は任意定数})$$

と表される.

**38** の解答群

- |              |                     |                       |                 |
|--------------|---------------------|-----------------------|-----------------|
| ① $x(1+u^2)$ | ② $\frac{1+u^2}{x}$ | ③ $\frac{1+u^2}{e^x}$ | ④ $x^3(1+3u^2)$ |
| ⑤ $x(1-u^2)$ | ⑥ $\frac{1-u^2}{x}$ | ⑦ $\frac{1-u^2}{e^x}$ | ⑧ $x^3(1-3u^2)$ |

(3) (c) に  $u = \frac{y}{x}$  を代入すれば, (a) の一般解が導かれる. それは,  $C \neq 0$  ならば,  $xy$  平面上の **39** を表す.

**39** の解答群

- ① 直線      ② 円      ③ だ円      ④ 双曲線      ⑤ 放物線  
⑥ サイクロイド

## 解説

- (1)  $y = xu$  および  $y' = u + xu'$  (以降,  $u(x)$  は単に  $u$ , その導関数は  $u'$  と書くことにする) を (a) に代入すると

$$x^2 + x^2u^2 = 2x^2u(u + xu')$$

を得る. ゆえに,  $1 - u^2 = 2xuu'$  となり

$$u' = \frac{1 - u^2}{2xu}$$

を得る. したがって, **37** の答えは ⑤ である.

- (2) (b) は変数分離形の微分方程式であり

$$\int \frac{2u}{1 - u^2} du = \int \frac{1}{x} dx \quad (|u| \neq 1)$$

を計算すればよい. 左辺を例えば  $t = 1 - u^2$  と置換して積分すれば

$$-\log|1 - u^2| = \log|x| + C_1$$

となり, これを変形していくと

$$\log|x(1 - u^2)| = -C_1$$

$$|x(1 - u^2)| = e^{-C_1}$$

$$x(1 - u^2) = \pm e^{-C_1} = C_2 \neq 0$$

を得る. 以上は  $|u| \neq 1$  の場合であり,  $u = \pm 1$  を別に考えると, これも (b) を満たす. したがって, (b) の一般解は

$$x(1 - u^2) = C \quad (C \text{ は任意定数})$$

であり, **38** の答えは ④ である.

- (3) (c) に  $u = \frac{y}{x}$  を代入すると,  $x \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) = C$  を得る. この式を変形すると

$x^2 - y^2 = Cx$  すなわち  $\left(x - \frac{C}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{C^2}{4}$  となる.  $C \neq 0$  のとき, これは双曲線を表す. したがって, **39** の答えは ③ である. ちなみに,  $C = 0$  の場合は  $y = \pm x$  となり, 2本の直線を表す.

**問 3**  $xy$  平面において、曲線  $K$  上の点  $P(t, f(t))$  における接線が点  $A(0, 2t\{f(t)\}^2)$  を通る。このときの  $f(t)$  を次のように求める。ただし、 $t > 0$  とし、 $f(t)$  は定数関数 0 でないものとする。

(1) 点  $P$  における接線の方程式は

$$y = f'(t)x + \boxed{40}$$

である。ただし、 $f'(t)$  は  $\frac{df}{dt}$  を表す。

**40** の解答群

- |                   |                            |                            |
|-------------------|----------------------------|----------------------------|
| ① 0               | ④ $t$                      | ⑦ $f(t)$                   |
| ② $tf(t)$         | ⑤ $\frac{f(t)}{t}$         | ⑧ $f'(t)$                  |
| ③ $tf'(t)$        | ⑥ $\frac{f'(t)}{t}$        | ⑨ $f(t) - tf'(t)$          |
| ④ $f'(t) - tf(t)$ | ⑩ $f(t) - \frac{f'(t)}{t}$ | ⑪ $f'(t) - \frac{f(t)}{t}$ |

(2) (1) で求めた接線が点  $A$  を通るので、 $\boxed{40} = 2t\{f(t)\}^2$  が成り立つ。ここで、 $z = \frac{1}{f(t)}$  とおくと、線形微分方程式

$$\frac{dz}{dt} + \boxed{41}z = \boxed{42}$$

が導かれる。

**41** ・ **42** の解答群

- |                  |                   |                    |              |                 |
|------------------|-------------------|--------------------|--------------|-----------------|
| ① 0              | ② 1               | ③ 2                | ④ -1         | ⑤ -2            |
| ⑥ $t$            | ⑦ $-t$            | ⑧ $t^2$            | ⑨ $-t^2$     | ⑩ $\frac{1}{t}$ |
| ⑪ $-\frac{1}{t}$ | ⑫ $\frac{1}{t^2}$ | ⑬ $-\frac{1}{t^2}$ | ⑭ $\sqrt{t}$ | ⑮ $-\sqrt{t}$   |

(3) (2) の線形微分方程式の一般解  $z$  を求めれば, それから

$$f(t) = \frac{1}{z} = \boxed{43} \quad (C \text{ は任意定数})$$

を得る.

**43** の解答群

①  $\frac{1}{t+C}$

②  $\frac{t}{C}$

③  $\frac{C}{t}$

④  $\frac{1}{t^2+C}$

⑤  $\frac{1}{t^2+Ct}$

⑥  $\frac{1}{t^2+t+C}$

⑦  $\frac{t}{t^2+C}$

⑧  $\frac{1}{t^3+Ct}$

⑨  $\frac{1}{t^3+Ct^2}$

⑩  $\frac{1}{t} + \frac{t}{C}$

Ⓐ  $\frac{1}{2t \log t + Ct}$

Ⓑ  $\frac{1}{-2t \log t + Ct}$

**解説**

- (1) 点  $P(t, f(t))$  における曲線  $K$  の接線の傾きは  $f'(t)$  で表せるため、接線の方程式は  $y - f(t) = f'(t)(x - t)$ , つまり

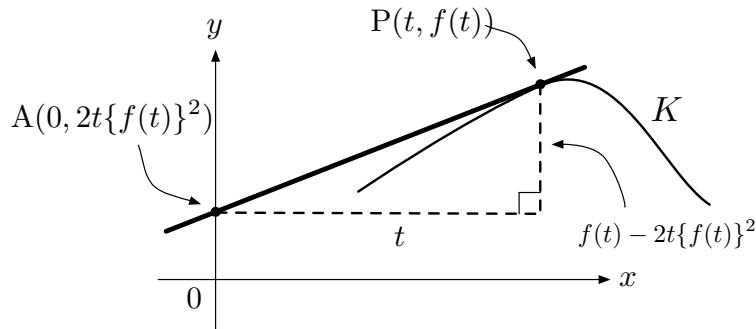
$$y = f'(t)x + f(t) - tf'(t)$$

と表すことができる。したがって、40 の答えは 8 である。

- (2) (1) で求めた接線は点  $A(0, 2t\{f(t)\}^2)$  を通るので

$$(*) \quad f(t) - tf'(t) = 2t\{f(t)\}^2$$

が成り立つ。これを  $f'(t)$  について解くと  $f'(t) = \frac{f(t) - 2t\{f(t)\}^2}{t}$  となるが、これは次の図を見るとわかるであろう。



ここで、 $z = \frac{1}{f(t)}$  とおくと、 $f(t) = \frac{1}{z}$  であり、その両辺を  $t$  で微分すると、 $f'(t) = -\frac{z'}{z^2}$  となる。これらを  $(*)$  に代入すれば

$$(**) \quad z' + \frac{1}{t}z = 2$$

が得られる。したがって、41 の答えは 9, 42 の答えは 2 である

- (3) 1 階線形微分方程式  $y' + P(x)y = Q(x)$  の解は

$$y = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$$

で与えられることが知られている。これを  $(**)$  に適用すると

$$z = e^{-\int \frac{1}{t} dt} \int 2e^{\int \frac{1}{t} dt} dt$$



となる。  $t > 0$  のとき、  $e^{\int \frac{1}{t} dt} = e^{\log |t|} = e^{\log t} = t$  となり、 また  $e^{-\int \frac{1}{t} dt} = \frac{1}{t}$  であることから、  $z = \frac{1}{t}(t^2 + C)$  を得る。 これを  $f(t) = \frac{1}{z}$  に代入すれば

$$f(t) = \frac{t}{t^2 + C}$$

を得る。 したがって、 **43** の答えは ⑥ である。

また、これは定数変化法を用いて求めることもできる。 まず同次方程式

$$z' + \frac{1}{t}z = 0$$

を解こう。 これは形式的に  $\frac{1}{z}dz = -\frac{1}{t}dt$  と書けるので、 変数分離形であることがわかる。 いま仮定により  $t > 0$ 、 つまり  $|t| = t$  である事に注意して両辺を積分すれば、 任意定数  $C$  を用いて  $\log |z| = -\log t + C_1$ 、 つまり

$$z = \pm e^{-\log t + C_1} = C_2 e^{-\log t} = \frac{C_2}{t} \quad (C_2 = \pm e^{C_1})$$

を得る。

次に上記の  $C_2$  を  $t$  の関数  $u(t)$  に置き換えたもの  $z = \frac{u(t)}{t}$  が求める微分方程式の解であると仮定する。 すると  $z' = \frac{u'(t)t - u(t)}{t^2}$  であることから

$$\frac{u'(t)t - u(t)}{t^2} + \frac{1}{t} \cdot \frac{u(t)}{t} = 2$$

となり、整理して

$$u'(t) = 2t$$

を得る。 これより  $u(t) = t^2 + C$  が得られ

$$f(t) = \frac{1}{z} = \frac{t}{u(t)} = \frac{t}{t^2 + C}$$

となる。

問 4 定数  $a$  を含む微分方程式

$$y'' + ay = 0$$

および条件

$$y'(0) = y'(1) = 0 \quad \text{かつ} \quad y(0) > 0$$

を満たす関数  $y$  について考える.

- (1)  $a = \boxed{44}$  のとき,  $y$  は正の定数関数である.
- (2)  $a$  が  $\boxed{44} < a < \boxed{45}$  を満たすとき,  $y$  は存在せず,  $a = \boxed{45}$  のとき,  $y$  は正の定数  $A$  を用いて  $y = A \cos \boxed{46} x$  と表される.

$\boxed{44} \sim \boxed{46}$  の解答群

- |                   |                 |                          |                     |                          |
|-------------------|-----------------|--------------------------|---------------------|--------------------------|
| ① 0               | ② 1             | ③ 2                      | ④ $\pi$             | ⑤ $\frac{\pi}{2}$        |
| ⑥ $\frac{\pi}{4}$ | ⑦ $\pi^2$       | ⑧ $2\pi^2$               | ⑨ $\frac{\pi^2}{2}$ | ⑩ $\frac{\pi^2}{4}$      |
| ⑪ $\sqrt{\pi}$    | ⑫ $2\sqrt{\pi}$ | ⑬ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ | ⑭ $\sqrt{2\pi}$     | ⑮ $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ |

解説

同次な 2 階線形微分方程式  $py'' + qy' + ry = 0$  ( $p, q, r$  は定数) に対し, 2 次方程式  $p\lambda^2 + q\lambda + r = 0$  をその微分方程式の特性方程式と呼ぶ. その判別式の符号により, 微分方程式の一般解は次のように分類される. ただし,  $C_1, C_2$  は任意定数である.

- (i)  $q^2 - 4pr > 0$  のとき, 特性方程式は相異なる 2 つの実数解  $\lambda = \mu, \nu$  をもち, 微分方程式の一般解は  $y = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{\nu x}$  と表される.
- (ii)  $q^2 - 4pr = 0$  のとき, 特性方程式は重解  $\lambda = \mu$  をもち, 微分方程式の一般解は  $y = C_1 e^{\mu x} + C_2 x e^{\mu x}$  と表される.
- (iii)  $q^2 - 4pr < 0$  のとき, 特性方程式は複素解  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  ( $\beta \neq 0$ ) をもち, 微分方程式の一般解は  $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$  と表される.

本問題の微分方程式の特性方程式は  $\lambda^2 + a = 0$  で、その解は

$$\lambda = \begin{cases} \pm\sqrt{-a} & (a < 0) \\ 0 \text{ (重解)} & (a = 0) \\ \pm\sqrt{a}i & (a > 0) \end{cases}$$

であるので、上記 (i), (ii), (iii) より、一般解

$$y = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{-a}x} + C_2 e^{-\sqrt{-a}x} & (a < 0) \\ C_1 + C_2 x & (a = 0) \\ C_1 \cos \sqrt{a}x + C_2 \sin \sqrt{a}x & (a > 0) \end{cases}$$

を得る。これらのうち、 $y'(0) = 0$  と  $y(0) > 0$  の両条件を満たすのは

$$(\#) \quad y = \begin{cases} A e^{\sqrt{-a}x} + A e^{-\sqrt{-a}x} & (a < 0) \\ A & (a = 0) \\ A \cos \sqrt{a}x & (a > 0) \end{cases} \quad (A \text{ は任意の正の定数})$$

と書けるものである。ところで、 $a < 0$  のときは、 $y' = A\sqrt{-a}(e^{\sqrt{-a}x} - e^{-\sqrt{-a}x})$  であり、 $y'(1) = A\sqrt{-a}(e^{\sqrt{-a}} - e^{-\sqrt{-a}}) > 0$  となるから、条件  $y'(1) = 0$  が成り立たない。したがって、 $a$  は  $a \geq 0$  であることがわかる。

- (1) 式 (#) より、 $y$  が定数関数 ( $y = A$ ) となるのは  $a = 0$  のときであるから、44 の答えは ① である。
- (2) 式 (#) より、 $a > 0$  のときは、 $y = A \cos \sqrt{a}x$  と表されるが、条件  $y'(1) = 0$  より、 $y'(1) = -A\sqrt{a} \sin \sqrt{a} = 0$ 、すなわち  $\sin \sqrt{a} = 0$  が成り立たないといけない。一般に、 $\sin \theta = 0$  ならば、 $\theta$  は  $m\pi$  ( $m$  は任意の整数) に等しいので、 $\sqrt{a} = n\pi$  ( $n$  は任意の自然数) を得る。また、 $\sqrt{a} \neq n\pi$  のときは、 $y'(1) \neq 0$  であり、題意を満たす  $y$  は存在しない。いま、 $n = 1$  の場合を考えれば、 $0 < \sqrt{a} < \pi$  (すなわち  $0 < a < \pi^2$ ) のときは  $y$  は存在せず、 $\sqrt{a} = \pi$  (すなわち  $a = \pi^2$ ) のときは  $y = A \cos \pi x$  となる。以上より、45 の答えは ⑥ であり、46 の答えは ③ である。

問5  $k > 2$  である定数  $k$  を含む微分方程式

$$y'' + 2ky' + 4y = e^{-4x}$$

の一般解は次の通りである。ただし、 $C_1, C_2$  は任意定数を表す。

(1)  $k \neq$  47 のとき

$$y = e^{-kx} \left( C_1 e^{\text{48}x} + C_2 e^{-\text{48}x} \right) + \frac{1}{\text{49}} e^{-4x}$$

47 の解答群

- |                 |                 |                 |                 |                  |                  |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| ① 3             | ② 4             | ③ 5             | ④ 6             | ⑤ 8              | ⑥ 10             |
| ⑦ $\frac{5}{2}$ | ⑧ $\frac{7}{2}$ | ⑨ $\frac{9}{2}$ | ⑩ $\frac{9}{4}$ | a $\frac{11}{4}$ | b $\frac{13}{4}$ |

48 ・ 49 の解答群

- |                    |                    |                     |                     |
|--------------------|--------------------|---------------------|---------------------|
| ① $k$              | ② $\frac{k}{2}$    | ③ $k^2$             | ④ $\sqrt{k}$        |
| ⑤ $\sqrt{k^2 - 4}$ | ⑥ $\sqrt{4 - k^2}$ | ⑦ $\sqrt{k^2 - 16}$ | ⑧ $\sqrt{16 - k^2}$ |
| ⑨ $2k + 20$        | ⑩ $-2k + 20$       | a $2k - 12$         | b $-2k - 12$        |
| c $8k + 20$        | d $-8k + 20$       | e $8k - 12$         | f $-8k - 12$        |

(2)  $k =$  47 のとき

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{\text{50}x} + \text{51} x e^{-4x}$$

50 ・ 51 の解答群

- |                  |                  |                  |                  |                  |                 |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|
| ① 0              | ② 1              | ③ 2              | ④ 3              | ⑤ $\frac{1}{2}$  | ⑥ $\frac{1}{3}$ |
| ⑦ $\frac{2}{3}$  | ⑧ $\frac{1}{4}$  | ⑨ $\frac{3}{4}$  | ⑩ -1             | a -2             | b -3            |
| c $-\frac{1}{2}$ | d $-\frac{1}{3}$ | e $-\frac{2}{3}$ | f $-\frac{1}{4}$ | g $-\frac{3}{4}$ |                 |

## 解説

一般に、非同次な2階線形微分方程式  $py'' + qy' + ry = f(x)$  の一般解  $y(x)$  は、対応する同次方程式  $pz'' + qz' + rz = 0$  の一般解  $z(x)$  と非同次方程式の特殊解  $y_0(x)$  を用いて、 $y(x) = z(x) + y_0(x)$  と表される。 $y_0$  については問4の解説を参照のこと。

- (1) 本問題の微分方程式に対応する同次方程式  $z'' + 2kz' + 4z = 0$  の特性方程式は  $\lambda^2 + 2k\lambda + 4 = 0$  である。 $k > 2$  であることから、判別式  $k^2 - 4$  の符号は正であり、問4の解説中の (i) の場合に該当する。特性方程式の実数解を求めると  $\lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - 4}$  であるので、同次方程式の一般解は

$$z = C_1 e^{(-k + \sqrt{k^2 - 4})x} + C_2 e^{(-k - \sqrt{k^2 - 4})x}$$

となる。

次に、非同次方程式  $y'' + 2ky' + 4y = e^{-4x}$  が  $y = y_0 = Ae^{-4x}$  ( $A$  は実定数) と書ける特殊解をもつと仮定して方程式に代入すると

$$16Ae^{-4x} - 8kAe^{-4x} + 4Ae^{-4x} = e^{-4x}$$

すなわち  $(20 - 8k)A = 1$  を得る。よって  $20 - 8k \neq 0$ 、すなわち  $k \neq \frac{5}{2}$  のときは、 $A = \frac{1}{20 - 8k}$  となり、非同次方程式の一般解は

$$y = z + y_0 = e^{-kx} \left( C_1 e^{\sqrt{k^2 - 4}x} + C_2 e^{-\sqrt{k^2 - 4}x} \right) + \frac{1}{20 - 8k} e^{-4x}$$

である。したがって、**47** の答えは **⑥**、**48** の答えは **④**、**49** の答えは **④** である。

- (2)  $k = \frac{5}{2}$  のとき、特性方程式は  $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$  となるので、 $\lambda = -1, -4$  である。したがって、**50** の答えは **⑨** である。このとき、非同次方程式  $y'' + 5y' + 4y = e^{-4x}$  が特殊解  $y = y_0 = Bxe^{-4x}$  ( $B$  は実定数) をもつと仮定して代入すると  $-3Be^{-4x} = 1$  を得る。したがって  $B = -\frac{1}{3}$  なので、**51** の答えは **④** である。

## 第4分野 確率・統計

〔 問 1 ～ 問 5 : 解答番号 52 ～ 70 〕

(注意) 事象  $A$  に対し,  $P(A)$  は  $A$  の起こる確率を表す. また, 事象  $A$  が起こったときの事象  $B$  の起こる条件付き確率を  $P(B|A)$  で表す. 確率変数  $X$  に対し,  $E(X), V(X)$  はそれぞれ期待値 (平均, 平均値), 分散を表す.

**問 1** 確率変数  $X, Y$  の確率分布がそれぞれ

$X$ の値	-1	0	1
確率	$\frac{1}{6}$	$a$	$b$

$Y$ の値	-1	0	1
確率	$\frac{1}{2}$	$c$	$d$

( $a, b, c, d$  は定数)

で与えられていて,  $E(X+Y) = 0$  および  $E(X-Y) = \frac{2}{3}$  が成り立つ. このとき

$$E(X) = \boxed{52}, \quad V(X) = \boxed{53}, \quad c = \boxed{54}$$

である.

52 ～ 54 の解答群

- |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① 0             | ② 1             | ③ $\frac{1}{2}$ | ④ $\frac{1}{3}$ | ⑤ $\frac{2}{3}$ |
| ⑥ $\frac{1}{4}$ | ⑦ $\frac{3}{4}$ | ⑧ $\frac{1}{6}$ | ⑨ $\frac{5}{6}$ | ⑩ $\frac{1}{9}$ |
| ⑪ $\frac{2}{9}$ | ⑫ $\frac{4}{9}$ | ⑬ $\frac{5}{9}$ | ⑭ $\frac{7}{9}$ | ⑮ $\frac{8}{9}$ |

**解説**

$E(X + Y) = 0$ ,  $E(X - Y) = \frac{2}{3}$  より,  $E(X) + E(Y) = 0$ ,  $E(X) - E(Y) = \frac{2}{3}$  が成り立つので,  $E(X) = \frac{1}{3}$ ,  $E(Y) = -\frac{1}{3}$  を得る. よって, **52** の答えは ㉓ である. これは,

$$E(X + Y) + E(X - Y) = E(2X) = 2E(X) = \frac{2}{3}$$

から求めてもよい.

つぎに, 確率変数の期待値の定義より

$$E(X) = -1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot a + 1 \cdot b = \frac{1}{3}$$

となり,  $b = \frac{1}{2}$  である. また, 確率の合計が 1 であることから

$$\frac{1}{6} + a + \frac{1}{2} = 1$$

より,  $a = \frac{1}{3}$  である. ここで, 公式  $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$  を用いると

$$V(X) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{6} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$$

を得る. よって, **53** の答えは ㉔ である.

確率変数  $Y$  についても同様に, 期待値の定義より

$$E(Y) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot c + 1 \cdot d = -\frac{1}{3}$$

より,  $d = \frac{1}{6}$  となる. 確率の合計が 1 であることから

$$\frac{1}{2} + c + \frac{1}{6} = 1$$

より,  $c = \frac{1}{3}$  を得る. よって, **54** の答えは ㉓ である.

**問 2** ひよこの性別を判定する機器が開発された。これは、メスの 96% を正しくメスと判定する一方、オスの 6% を誤ってメスと判定してしまう。いま、オスとメスが混在したひよこの集団から無作為に選んだ 1 匹が機器によりメスと判定された。このとき、そのひよこが本当にメスである確率を求めたい。

そこで、選んだひよこがメスである事象を  $A$ 、オスである事象を  $B$  で表す。ただし、 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$  とする。また、選んだひよこが機器によりメスと判定される事象を  $C$  とする。

(1)  $P(A \cap C) = \boxed{55}$ ,  $P(B \cap C) = \boxed{56}$  であるから、 $P(C) = \boxed{55} + \boxed{56}$  である。

(2) 求めたい確率は条件付き確率  $P(A|C)$  であり、その値は  $\boxed{57}$  である。

**55 ~ 57 の解答群**

- |                   |                   |                   |                    |                    |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| ① $\frac{1}{2}$   | ② $\frac{2}{3}$   | ③ $\frac{3}{5}$   | ④ $\frac{4}{5}$    | ⑤ $\frac{15}{17}$  |
| ⑥ $\frac{16}{17}$ | ⑦ $\frac{6}{25}$  | ⑧ $\frac{12}{25}$ | ⑨ $\frac{24}{25}$  | ⑩ $\frac{3}{50}$   |
| Ⓐ $\frac{47}{50}$ | Ⓑ $\frac{2}{100}$ | Ⓒ $\frac{3}{100}$ | Ⓓ $\frac{47}{100}$ | Ⓔ $\frac{49}{100}$ |

**解説**

(1)  $P(A \cap C)$  は「無作為に選んだひよこがメスであり、かつそのひよこが機器によりメスと判定される確率」を表している。メスである確率は  $\frac{1}{2}$ 、メスが機器により正しくメスと判定される確率は  $\frac{96}{100}$  であるので

$$P(A \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{96}{100} = \frac{12}{25}$$

を得る。同様に  $P(B \cap C)$  は「無作為に選んだひよこがオスであり、かつそのひよこが機器によりメスと判定される確率」を表している。オスである確率は  $\frac{1}{2}$ 、オスが機器により誤ってメスと判定される確率は  $\frac{6}{100}$  であるので

$$P(B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{100} = \frac{3}{100}$$

を得る。したがって、 $\boxed{55}$  の答えは ⑦、 $\boxed{56}$  の答えは ③ である。



(2) (1) の計算結果により  $P(C) = \frac{12}{25} + \frac{3}{100} = \frac{51}{100}$  がわかる. よって求める条件付き確率は

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{12}{25} \cdot \frac{100}{51} = \frac{16}{17}$$

となり, 57 の答えは ⑤ である.

### 別解

条件付き確率が分かりづらい場合は, オスとメスがそれぞれ 100 匹ずついると仮定して計算を進めてもよい. メス 100 匹を機器にかけると, 96 匹は正しくメスと判定されるが, 4 匹は逆にオスと判定される. またオス 100 匹を機器にかけると, 94 匹は正しくオスと判定されるが, 6 匹は逆にメスと判定される. そこで,  $A$  をメスの集合,  $B$  をオスの集合,  $C$  を機器によりメスと判定されたひよこの集合と読み替えてまとめると次のようになる.

全部で 200 匹

	メスと判定 (集合 $C$ )	オスと判定 ( $C$ の補集合)
メスである (集合 $A$ )	96 匹	4 匹
オスである (集合 $B$ )	6 匹	94 匹

(1) 表より,  $A \cap C$  に属すひよこは 96 匹,  $B \cap C$  に属すひよこは 6 匹いる. 全部で 200 匹いたので, これより

$$P(A \cap C) = \frac{96}{200} = \frac{12}{25}, \quad P(B \cap C) = \frac{6}{200} = \frac{3}{100}$$

である事がわかる. ここで,  $P(S)$  は集合  $S$  に属すひよこの全 200 匹に占める割合と読み替えた.

(2) 求める条件付き確率  $P(A|C)$  は,  $A \cap C$  に属すひよこ (96 匹) の  $C$  に属すひよこ (96 + 6 = 102 匹) に対する割合に等しいので

$$P(A|C) = \frac{96}{102} = \frac{16}{17}$$

となる.

**問 3** 赤玉と白玉が 1 : 1 の比率で入っている袋から無作為に玉を 1 個取り出し、色を確認してから袋に戻す試行を独立に 5 回行う。5 回のうち、赤玉が出た回数を確率変数  $X$  とし、確率変数  $Y$  を  $Y = 2X - 5$  で与える。

- (1)  $X$  は二項分布  $B\left(5, \frac{1}{2}\right)$  に従い、 $V(X) = \boxed{58}$  である。 $V(Y)$  は  $V(X)$  の  $\boxed{59}$  倍である。

$\boxed{58}$  ・  $\boxed{59}$  の解答群

- |      |      |                 |                 |                 |                 |
|------|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① 0  | ② 1  | ③ 2             | ④ 3             | ⑤ 4             | ⑥ 5             |
| ⑦ 10 | ⑧ 20 | ⑨ $\frac{1}{2}$ | ⑩ $\frac{5}{2}$ | Ⓐ $\frac{1}{4}$ | Ⓑ $\frac{5}{4}$ |

- (2) 確率変数  $X$  と  $Y$  は  $\boxed{60}$  . 実際

$$P(Y = 1) = \boxed{61}, \quad P(Y = 1 \mid 3 \leq X \leq 5) = \boxed{62}$$

である。

- (3)  $3 \leq X \leq 5$  となる事象と  $|Y| = 1$  となる事象は  $\boxed{63}$  . 実際

$$P(|Y| = 1) = \boxed{61} \times 2, \quad P(|Y| = 1 \mid 3 \leq X \leq 5) = \boxed{62}$$

である。

$\boxed{60}$  ・  $\boxed{63}$  の解答群

- |                      |                 |
|----------------------|-----------------|
| ① 独立である              | ② 従属である (独立でない) |
| ③ 独立であるとも従属であるともいえない |                 |

61 ・ 62 の解答群

- ① 0      ② 1      ③  $\frac{1}{2}$       ④  $\frac{1}{4}$       ⑤  $\frac{3}{4}$       ⑥  $\frac{1}{8}$   
 ⑦  $\frac{3}{8}$       ⑧  $\frac{5}{8}$       ⑨  $\frac{7}{8}$       ⑩  $\frac{1}{16}$       ⑪  $\frac{3}{16}$       ⑫  $\frac{5}{16}$   
 ⑬  $\frac{7}{16}$       ⑭  $\frac{9}{16}$       ⑮  $\frac{15}{16}$       ⑯  $\frac{1}{32}$       ⑰  $\frac{5}{32}$       ⑱  $\frac{15}{32}$

解説

本問題は、(1)で二項分布の基本的事項、(2)で確率変数の独立性、(3)で事象の独立性を問う構成となっている。問題文に出てくる試行の独立性と合わせ、確率・統計で出てくる3つの「独立性」に注意を向けさせるのが本問題の狙いである。

一般に、二項分布  $B(n, p)$  に従う確率変数  $Z$  の値が  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  となる確率  $P(Z = k)$  は  ${}_n C_k p^k (1-p)^{n-k}$  ( ${}_n C_k$  は二項係数) に等しく、 $E(X) = np$ ,  $V(X) = np(1-p)$  であることが知られている。本問題は  $n = 5$ ,  $p = \frac{1}{2}$  の場合であり、 $X$  の確率分布は次の通りである。

$X$ の値 ( $Y$ の値)	0 (-5)	1 (-3)	2 (-1)	3 (1)	4 (3)	5 (5)
確率	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

- (1)  $V(X) = np(1-p) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$  であり、58 の答えは ⑥ である。もちろん、これは上の表を参考にして  $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$  により直接算出することもできる。また、 $a, b$  を定数とするとき、 $V(aX + b) = a^2 V(X)$  が成り立つから、 $V(Y) = V(2X + 5) = 4V(X)$  であり、59 の答えは ④ である。これもまた、表から算出しても良い。

- (2) 一般に、確率変数  $S$  と  $T$  について

$$P(a \leq S \leq b)P(c \leq T \leq d) = P(a \leq S \leq b, c \leq T \leq d)$$

あるいはそれを書き換えたもの

$$P(a \leq S \leq b) = P(a \leq S \leq b \mid c \leq T \leq d) \left( = \frac{P(a \leq S \leq b, c \leq T \leq d)}{P(c \leq T \leq d)} \right)$$

が任意の定数  $a, b, c, d$  (ただし  $a \leq b, c \leq d$ ) について成り立つとき,  $S$  と  $T$  は独立であると言ひ, そうでないとき, 従属である (独立でない) と言ひ. 本問題の  $X$  と  $Y$  には  $Y = 2X - 5$  なる関係があるので, 従属であるのは明らかであるが, 実際に, 上の表より  $P(Y = 1) = P(X = 3) = \frac{5}{16}$ ,

$$\begin{aligned} P(Y = 1 | 3 \leq X \leq 5) &= P(X = 3 | 3 \leq X \leq 5) = \frac{P(X = 3)}{P(3 \leq X \leq 5)} \\ &= \frac{\frac{5}{16}}{\frac{5}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32}} = \frac{5}{8} \neq P(Y = 1) \end{aligned}$$

を得る. よつて, **60** の答えは ① であり, **61**, **62** の答えはそれぞれ ⑥, ⑦ である.

(3) 一般に, 事象  $A$  と  $B$  について

$$P(A)P(B) = P(A \cap B)$$

あるいはそれを書き換えたもの

$$P(A) = P(A|B) \left( = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right)$$

が成り立つとき,  $A$  と  $B$  は独立であると言ひ, そうでないとき, 従属である (独立でない) と言ひ. (2) の確率変数の独立性の定義と似ているので注意しよう. 確率変数  $S$  と  $T$  が独立であることは, 任意の  $a, b, c, d$  に対して  $a \leq S \leq b$  となる事象と  $c \leq T \leq d$  となる事象が独立であることに等しい. 言い換えれば,  $S$  と  $T$  が従属であることは, ある  $a_0, b_0, c_0, d_0$  に対して  $a_0 \leq S \leq b_0$  となる事象と  $c_0 \leq T \leq d_0$  となる事象が従属であることに等しい. 見方を変えれば,  $S$  と  $T$  が従属であっても, ある  $a_1, b_1, c_1, d_1$  について  $a_1 \leq S \leq b_1$  となる事象と  $c_1 \leq T \leq d_1$  となる事象が独立である可能性は残されている. 確率変数  $|Y|$  は  $Y$  と同様に  $X$  と従属の関係にあるが

$$P(|Y| = 1) = P(Y = -1) + P(Y = 1) = \frac{5}{16} + \frac{5}{16} = \frac{5}{8},$$

$$\begin{aligned} P(|Y| = 1 | 3 \leq X \leq 5) &= P(Y = -1 | 3 \leq X \leq 5) \\ &\quad + P(Y = 1 | 3 \leq X \leq 5) = 0 + \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

からわかる通り,  $|Y| = 1$  となる事象と  $3 \leq X \leq 5$  となる事象は独立であるので, **63** の答えは ⑩ である.  $|Y|$  の値と事象  $3 \leq X \leq 5$  (あるいは余事象  $0 \leq X \leq 2$ ) の独立性は, 上の表を書き換えた次の表を見ると, 理解しやすいかもしれない.

	$ Y  = 1$ ( $X = 2, 3$ )	$ Y  = 3$ ( $X = 1, 4$ )	$ Y  = 5$ ( $X = 0, 5$ )	$ Y  = 1, 3, 5$ ( $X = 0, 1, \dots, 5$ )
$0 \leq X \leq 2$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}$
$3 \leq X \leq 5$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}$
$0 \leq X \leq 5$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

$|Y|$  の値のライン (縦のライン) と  $X$  の範囲のライン (横のライン) が交差したところにある数字は、その両方が成り立つ確率を意味する。

問 4  $a, b$  を正の定数とする. 確率変数  $X$  の確率密度関数  $f(x)$  が

$$f(x) = \begin{cases} b - a|x| & \left(|x| \leq \frac{b}{a}\right) \\ 0 & \left(|x| > \frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

で与えられている. このとき,  $b$  は  $a$  を用いて  $b =$  64 と表され,  $E(X) =$  65 である. さらに,  $V(X) = 1$  とすると,  $a =$  66 となる.

64 ・ 65 の解答群

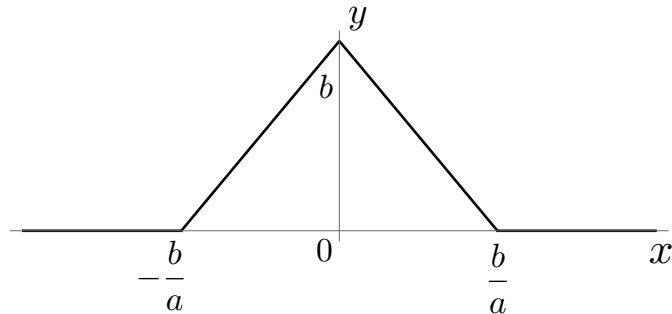
- |                  |                   |                    |                        |                         |
|------------------|-------------------|--------------------|------------------------|-------------------------|
| ① 0              | ② 1               | ③ 2                | ④ $a$                  | ⑤ $2a$                  |
| ⑥ $a^2$          | ⑦ $2a^2$          | ⑧ $\sqrt{a}$       | ⑨ $\sqrt{2a}$          | ⑩ $\frac{1}{a}$         |
| ⑪ $\frac{1}{2a}$ | ⑫ $\frac{1}{a^2}$ | ⑬ $\frac{1}{2a^2}$ | ⑭ $\frac{1}{\sqrt{a}}$ | ⑮ $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ |

66 の解答群

- |                 |                 |                 |                 |                 |                 |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① 0             | ② 1             | ③ 2             | ④ 3             | ⑤ 4             | ⑥ $\frac{1}{2}$ |
| ⑦ $\frac{1}{3}$ | ⑧ $\frac{2}{3}$ | ⑨ $\frac{1}{4}$ | ⑩ $\frac{3}{4}$ | ⑪ $\frac{1}{6}$ | ⑫ $\frac{5}{6}$ |

### 解説

$y = f(x)$  のグラフは次の通り.



確率密度関数  $f(x)$  は,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$  を満たさないといけないが,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \{f(x) \text{ のグラフと } x \text{ 軸に囲まれた三角形の面積}\} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} + \frac{b}{a} \right) b = \frac{b^2}{a}\end{aligned}$$

であるから,  $\frac{b^2}{a} = 1$  すなわち  $b^2 = a$  を得る.  $b > 0$  のため,  $b = \sqrt{a}$  となる. したがって, **64** の答えは **⑦** である.

次に,  $E(X)$  は  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$  から求められるが,  $f(x)$  は偶関数のため  $xf(x)$  は奇関数となり,  $E(X) = 0$  を得る. したがって, **65** の答えは **①** である.

さらに

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 = E(X^2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 f(x)dx \quad (x^2 f(x) \text{ は偶関数だから}) \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} x^2 (\sqrt{a} - ax)dx \\ &= 2 \left[ \frac{\sqrt{a}}{3} x^3 - \frac{a}{4} x^4 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \\ &= 2 \left( \frac{1}{3a} - \frac{1}{4a} \right) = \frac{1}{6a}\end{aligned}$$

が成り立ち, これが 1 に等しいので,  $a = \frac{1}{6}$  を得る. したがって, **66** の答えは **④** である.

**問 5** U市にはたくさんのコイが泳いでいる大きな沼がある。先日、そこでコイを 100 匹捕まえ、1 匹ずつ重さをはかる調査が行われた。その結果、測定値の平均は 1151 g であった。沼のすべてのコイについて、重さの平均を  $\mu$  g とするとき、測定結果を用いて  $\mu$  の信頼度 95% での信頼区間を求めたい。なお、コイ個々の重さは正規分布に従い、その標準偏差は 75 g であることがわかっている。

まず、 $n$  匹目 ( $n = 1, 2, \dots, 100$ ) に捕まえたコイの重さを確率変数  $X_n$  とする。これら 100 個の確率変数は互いに独立で、それぞれ正規分布  $N(\mu, 75^2)$  に従う。したがって、標本平均

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{100}}{100}$$

は正規分布  $N(\mu, \boxed{67})$  に従う。そこで

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\boxed{68}}$$

とおけば、 $Z$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  に従う確率変数である。正規分布表によれば

$$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) \doteq 0.95$$

であることがわかるので

$$P\left(\bar{X} - \boxed{69} \leq \mu \leq \bar{X} + \boxed{69}\right) \doteq 0.95$$

が成り立つ。したがって

$$\left[\bar{x} - \boxed{69}, \bar{x} + \boxed{69}\right]$$

に  $\bar{x} = 1151$  を代入したものが求める信頼区間である。なお、この信頼区間の幅は、捕まえるコイの数 100 を  $\boxed{70}$  倍にすると半分になる。

$\boxed{67} \cdot \boxed{68}$  の解答群

- |                     |                    |                   |                    |                     |
|---------------------|--------------------|-------------------|--------------------|---------------------|
| ① 0.75              | ② 7.5              | ③ 75              | ④ 750              | ⑤ 7500              |
| ⑥ 0.75 <sup>2</sup> | ⑦ 7.5 <sup>2</sup> | ⑧ 75 <sup>2</sup> | ⑨ 750 <sup>2</sup> | ⑩ 7500 <sup>2</sup> |
| Ⓐ $\sqrt{0.75}$     | Ⓑ $\sqrt{7.5}$     | Ⓒ $\sqrt{75}$     | Ⓓ $\sqrt{750}$     | Ⓔ $\sqrt{7500}$     |



**69** の解答群

- ① 0.0110      ② 0.110      ③ 1.10      ④ 11.0      ⑤ 110
- ⑥ 0.0147      ⑦ 0.147      ⑧ 1.47      ⑨ 14.7      ⑩ 147
- Ⓐ 0.0196      Ⓑ 0.196      Ⓒ 1.96      Ⓓ 19.6      Ⓔ 196

**70** の解答群

- ① 25      ② 20      ③ 10      ④ 5      ⑤ 4      ⑥ 2
- ⑦  $\frac{1}{25}$       ⑧  $\frac{1}{20}$       ⑨  $\frac{1}{10}$       ⑩  $\frac{1}{5}$       Ⓐ  $\frac{1}{4}$       Ⓑ  $\frac{1}{2}$

**解説**

$X_1, X_2, \dots, X_n$  の分布が独立で、それぞれが同一の正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従うとき、標本平均と呼ばれる  $\bar{X} = \frac{1}{n}\{X_1 + X_2 + \dots + X_n\}$  の分布も正規分布であり、

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \frac{1}{n}\{E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)\} \\ &= \frac{1}{n}(\mu + \mu + \dots + \mu) \quad (\mu \text{ が } n \text{ 個}) \\ &= \frac{n\mu}{n} = \mu \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned} V(\bar{X}) &= \frac{1}{n^2}\{V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)\} \\ &= \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2) \quad (\sigma^2 \text{ が } n \text{ 個}) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

であるから、 $\bar{X}$  の分布は正規分布  $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  である。この問題の場合は  $n = 100, \sigma = 75$  であるから **67** の答えは **⑥** である。

$\bar{X}$  を標準化するには、平均  $\mu$  を引いてから標準偏差  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7.5$  で割れば良いので

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{7.5}$$

である. よって **68** の答えは ① である.

さて

$$\begin{aligned} -1.96 &\leq Z \leq 1.96 \\ \Leftrightarrow -1.96 &\leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96 \\ \Leftrightarrow -1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\leq \bar{X} - \mu \leq 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow -1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\leq \mu - \bar{X} \leq 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow \bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} &\leq \mu \leq \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) &= 0.95 \\ \Leftrightarrow P\left(\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= 0.95 \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, 信頼度 95% の信頼区間は,  $\bar{X}$  に実現値  $\bar{x}$  を代入した

$$\left[\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

であり, この問題の場合は  $\sigma = 75$ ,  $n = 100$ ,  $\bar{x} = 1151$  を代入した

$$[1151 - 14.7, 1151 + 14.7] = [1136.3, 1165.7]$$

であり, **69** の答えは ⑧ である.

また信頼区間の幅は  $1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times 2$  であるから,  $n$  を 4 倍すれば半分になる. したがって, **70** の答えは ④ である.