第１分野　微分積分

〔 問１〜問６ ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{20}}$ 〕

(注意) $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \cos^{-1}x \leqq \pi$，$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問１ (1) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)} - \frac{x}{x^2-1}\right) = \boxed{\mathbf{1}}$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^{-1}\dfrac{x}{5}}{x} = \boxed{\mathbf{2}}$ である．

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3		
④ $\dfrac{1}{5}$	⑤ $\dfrac{2}{5}$	⑥ $\dfrac{3}{5}$	⑦ $\dfrac{4}{5}$	⑧ $\dfrac{1}{4}$	⑨ $\dfrac{3}{4}$
ⓐ $\dfrac{1}{3}$	ⓑ $\dfrac{2}{3}$	ⓒ $\dfrac{1}{2}$			

解説

(1) このタイプの極限は通分して分母分子の共通因子を消去するのが常套手段である．したがって，

$$\frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)} - \frac{x}{x^2-1} = \frac{x^2-1-x^2(x-1)}{x^2(x^2-1)} = \frac{(x-1)(x+1-x^2)}{x^2(x^2-1)} = \frac{x+1-x^2}{x^2(x+1)}$$

より，求める極限値は $\dfrac{1}{2}$ であるから，$\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ⓒである．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin^{-1}\frac{x}{5} = 0$ であることより，いわゆる $\dfrac{0}{0}$ 型の極限であり，ロピタルの定理が使えることがわかる．

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin^{-1}\frac{x}{5}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(3\sin^{-1}\frac{x}{5}\right)'}{x'} = \frac{3}{5}$$

であるから，$\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは，⑥である．

問 2 関数 $y = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$ の導関数を求める．両辺の自然対数をとると，

$$\log y = \boxed{\textbf{3}} \log x$$

となる．さらに，両辺を x で微分すると，

$$\boxed{\textbf{4}} \frac{dy}{dx} = \boxed{\textbf{5}}$$

である．したがって，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\boxed{\textbf{5}}}{\boxed{\textbf{4}}}$$

である．

$\boxed{\textbf{3}}$ ・ $\boxed{\textbf{4}}$ **の解答群**

⓪ x	① $-x$	② x^2	③ $-x^2$
④ $\frac{1}{x}$	⑤ $-\frac{1}{x}$	⑥ $\frac{1}{x^2}$	⑦ $-\frac{1}{x^2}$
⑧ y	⑨ $-y$	ⓐ y^2	ⓑ $-y^2$
ⓒ $\frac{1}{y}$	ⓓ $-\frac{1}{y}$	ⓔ $\frac{1}{y^2}$	ⓕ $-\frac{1}{y^2}$

$\boxed{\textbf{5}}$ **の解答群**

⓪ 1	① $1 + \log x$	② $1 - \log x$	
③ $\frac{1}{x^2}$	④ $-\frac{\log x}{x^2}$	⑤ $\frac{1 + \log x}{x^2}$	⑥ $\frac{1 - \log x}{x^2}$
⑦ $\frac{x + \log x}{x^2}$	⑧ $\frac{x - \log x}{x^2}$		

解説

$y = x^{\frac{1}{x}}$ の両辺の自然対数をとると，$\log y = \log x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log x$ であるから，$\boxed{\textbf{3}}$ の答えは④である．さらに，その両辺を x で微分すると，

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}\log x + (\frac{1}{x})^2 = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

であるから，$\boxed{\textbf{4}}$，$\boxed{\textbf{5}}$ の答えはそれぞれⓒ，⑥ である．

問 3 不定積分 $I = \displaystyle\int \tan^{-1} x \, dx$ を計算する．$I = \displaystyle\int x' \tan^{-1} x \, dx$ とみなして部分積分を行うと，

$$I = \boxed{\mathbf{6}} - \int \boxed{\mathbf{7}} \, dx = \boxed{\mathbf{6}} - \boxed{\mathbf{8}} \qquad \text{(積分定数は省略)}$$

である．

$\boxed{6}$ の解答群

⓪ 1　① x　② $\dfrac{x^2}{2}$

③ $\tan^{-1} x$　④ $x \tan^{-1} x$　⑤ $\dfrac{x^2}{2} \tan^{-1} x$

⑥ $\dfrac{1}{\cos^2 x}$　⑦ $\dfrac{x}{\cos^2 x}$　⑧ $\dfrac{x^2}{2\cos^2 x}$

$\boxed{7}$ の解答群

⓪ 1

① $\dfrac{1}{1+x}$　② $\dfrac{x}{1+x}$　③ $\dfrac{x}{1+x^2}$

④ $\dfrac{1}{1-x}$　⑤ $\dfrac{x}{1-x}$　⑥ $\dfrac{x}{1-x^2}$

⑦ $\dfrac{1}{\cos^2 x}$　⑧ $\dfrac{x}{\cos^2 x}$

$\boxed{8}$ の解答群

⓪ x　① x^2　② $\tan x$

③ $\log|1+x|$　④ $\log|1-x|$　⑤ $x - \log|1+x|$

⑥ $-x - \log|1-x|$　⑦ $\log(1+x^2)$　⑧ $\dfrac{1}{2}\log(1+x^2)$

⑨ $\dfrac{x}{2}\log(1+x^2)$

解説

部分積分を行うと，

$$\begin{aligned}\int \tan^{-1} x dx &= \int x' \tan^{-1} x dx \\ &= x\tan^{-1} x - \int x(\tan^{-1} x)' dx \\ &= x\tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\end{aligned}$$

を得る．よって，$\boxed{\mathbf{6}}$，$\boxed{\mathbf{7}}$，$\boxed{\mathbf{8}}$ の答えはそれぞれ④，③，⑧である．

問 4　xyz 空間内において，関数 $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$　$\bigl((x,y,z) \neq (0,0,0)\bigr)$ の 2 階偏導関数を考える．$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおくと，

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \boxed{\textbf{9}}$$

となる．また，$u = \dfrac{1}{r}$ より，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \boxed{\textbf{10}}$$

を得る．さらに，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \boxed{\textbf{11}}$$

である．同様に，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ を計算すると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \boxed{\textbf{12}}$$

となる．

$\boxed{\textbf{9}}$ ・ $\boxed{\textbf{10}}$ の解答群

⓪ 0　① 1

② $\dfrac{x}{r}$　③ $\dfrac{x}{r^2}$　④ $\dfrac{x^2}{r^2}$　⑤ $\dfrac{x}{r^3}$　⑥ $\dfrac{x^2}{r^3}$

⑦ $-\dfrac{x}{r}$　⑧ $-\dfrac{x}{r^2}$　⑨ $-\dfrac{x^2}{r^2}$　ⓐ $-\dfrac{x}{r^3}$　ⓑ $-\dfrac{x^2}{r^3}$

$\boxed{\textbf{11}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{r^3}$　① $\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3x^2}{r^4}$　② $\dfrac{1}{r^3} - \dfrac{3x^2}{r^5}$　③ $\dfrac{1}{r^4} - \dfrac{3x^2}{r^6}$

④ $-\dfrac{1}{r^3}$　⑤ $-\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3x^2}{r^4}$　⑥ $-\dfrac{1}{r^3} + \dfrac{3x^2}{r^5}$　⑦ $-\dfrac{1}{r^4} + \dfrac{3x^2}{r^6}$

$\boxed{\mathbf{12}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	
② $\dfrac{3}{r}$	③ $\dfrac{1}{r^2}$	④ $\dfrac{3}{r^3}$
⑤ $-\dfrac{1}{r}$	⑥ $-\dfrac{3}{r^2}$	⑦ $-\dfrac{3}{r^3}$

解説

3 変数の関数 r の x に関する偏微分を合成関数の微分を用いて計算すると，

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

であるから，$\boxed{\mathbf{9}}$ の答えは②である．また，$u = \dfrac{1}{r}$ の x に関する偏導関数を合成関数の微分を用いて計算すると，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

を得る．よって，$\boxed{\mathbf{10}}$ の答えはⓐである．さらに，上式を x で偏微分すると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + 3\frac{x}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$$

であるから，$\boxed{\mathbf{11}}$ の答えは⑥である．同様にして

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}$$

を得る．したがって，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3r^2}{r^5} = 0$$

であるから，$\boxed{\mathbf{12}}$ の答えは⓪である．

問 5　xy 平面内の集合 D が

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 9,\ x + y \geqq 0\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2 + 9}\, dxdy$$

の値を求める．極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行うと，D に対応する (r, θ) の集合は

$$E = \left\{(r, \theta) \mid 0 \leqq r \leqq \boxed{\mathbf{13}},\ -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{14}}\right\}$$

であるから，

$$I = \int_0^{\boxed{\mathbf{13}}} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\boxed{\mathbf{14}}} \boxed{\mathbf{15}}\, d\theta \right\} dr$$

となる．ここで，

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\boxed{\mathbf{14}}} \boxed{\mathbf{15}}\, d\theta = \boxed{\mathbf{16}}$$

であるから，

$$I = \int_0^{\boxed{\mathbf{13}}} \boxed{\mathbf{16}}\, dr = \boxed{\mathbf{17}}$$

となる．

13・14 の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ $\dfrac{\pi}{4}$　⑥ $\dfrac{3}{4}\pi$　⑦ $\dfrac{\pi}{3}$　⑧ $\dfrac{2}{3}\pi$　⑨ $\dfrac{\pi}{2}$　ⓐ π

15 の解答群

⓪ $\dfrac{r\cos\theta}{r^2+9}$　① $\dfrac{r\sin\theta}{r^2+9}$　② $\dfrac{r^2\cos\theta}{r^2+9}$　③ $\dfrac{r^2\sin\theta}{r^2+9}$

$\boxed{16}$ の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{\sqrt{2}\,r}{r^2+9}$　② $\dfrac{\sqrt{2}\,r^2}{r^2+9}$　③ $\dfrac{r^2}{\sqrt{2}\,(r^2+9)}$

④ $\dfrac{r}{\sqrt{2}\,(r^2+9)}$　⑤ $-\dfrac{\sqrt{2}\,r}{r^2+9}$　⑥ $-\dfrac{\sqrt{2}\,r^2}{r^2+9}$

⑦ $-\dfrac{r^2}{\sqrt{2}\,(r^2+9)}$　⑧ $-\dfrac{r}{\sqrt{2}\,(r^2+9)}$

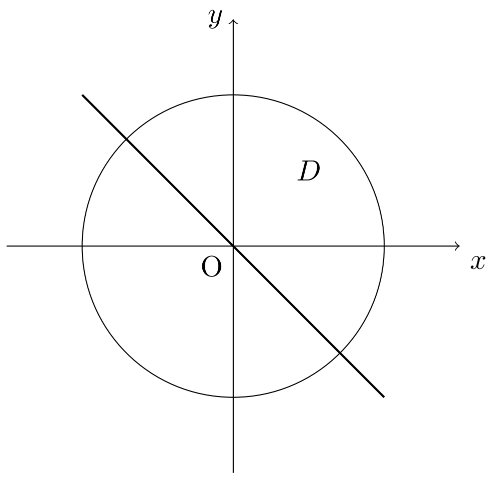
$\boxed{17}$ の解答群

⓪ 0　① $3\sqrt{2}\left(1+\dfrac{\pi}{6}\right)$　② $3\sqrt{2}\left(1+\dfrac{\pi}{4}\right)$　③ $3\sqrt{2}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$

④ $3\sqrt{2}\left(1-\dfrac{\pi}{6}\right)$　⑤ $3\sqrt{2}\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$　⑥ $3\sqrt{2}\left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)$

解説

集合 D を図示すると



となる．よって極座標変換 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ により D には

$$E=\left\{(r,\theta)\,|\,0\leqq r\leqq 3,\ -\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{4}\right\}$$

が対応する．従って $\boxed{13}$ の答は ③ であり，$\boxed{14}$ の答は ⑥である．

極座標変換により $dxdy$ には $rd\theta dr$ が対応するので

$$I=\int_0^3\left\{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{r^2\cos\theta}{r^2+9}\,d\theta\right\}dr$$

である．よって $\boxed{\mathbf{15}}$ の答は ②である．

上式の内側の積分は

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{r^2\cos\theta}{r^2+9}\,d\theta = \frac{r^2}{r^2+9}\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}r^2}{r^2+9}$$

であるから $\boxed{\mathbf{16}}$ の答は ② である．これより

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^3 \frac{\sqrt{2}r^2}{r^2+9}\,dr \\
&= \sqrt{2}\int_0^3 \left\{1-\frac{9}{r^2+9}\right\}dr \\
&= \sqrt{2}\left[r-3\tan^{-1}\frac{r}{3}\right]_0^3 \\
&= \sqrt{2}\left\{3-3\tan^{-1}1\right\} = 3\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

となるので $\boxed{\mathbf{17}}$ の答えは ⑤ である．

問 6 正数 t をパラメータとする xy 平面内の曲線

$$C_t : y = tx^2 + \frac{1}{t}$$

の集まりを記号 $\{C_t\}_{t>0}$ で表す．微分可能な関数 $\varphi(t), \psi(t)$ によって与えられる曲線 $C : x = \varphi(t)$，$y = \psi(t)$ $(t > 0)$ が次の条件を満たすとき，C は $\{C_t\}_{t>0}$ の包絡線であると言う．

(i) 各 t について C 上の点 $\mathrm{P}(\varphi(t), \psi(t))$ は C_t の上にもある．

(ii) 各 t について C と C_t は $\mathrm{P}(\varphi(t), \psi(t))$ において接線を共有する．

包絡線を次のように求める．まず (i) より

$$(*) \qquad \psi(t) = t\varphi(t)^2 + \frac{1}{t}$$

が成り立つ．$(*)$ の両辺を t で微分すると

$$(**) \qquad \psi'(t) = \boxed{\mathbf{18}} - \frac{1}{t^2}$$

となる．また (ii) より点 $\mathrm{P}(\varphi(t), \psi(t))$ における C と C_t の接線の傾きは等しいから

$$(***) \qquad \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \boxed{\mathbf{19}}$$

が成り立つ．$(**)$ と $(***)$ より $\varphi(t)^2 = \boxed{\mathbf{20}}$ を得る．これを $(*)$ に代入し，整理すると，$x = \varphi(t)$，$y = \psi(t)$ より，

$$y = 2|x| \quad (x \neq 0)$$

を得る．

18 ・ **19** **の解答群**

⓪ $2t\varphi(t)$	① $\varphi(t) + 2t\varphi(t)$	② $\varphi(t)^2 + 2t\varphi(t)$
③ $2t\varphi'(t)$	④ $\varphi(t) + 2t\varphi'(t)$	⑤ $\varphi(t)^2 + 2t\varphi'(t)$
⑥ $2\varphi(t)\varphi'(t)$	⑦ $\varphi(t) + 2\varphi(t)\varphi'(t)$	⑧ $\varphi(t)^2 + 2\varphi(t)\varphi'(t)$
⑨ $2t\varphi(t)\varphi'(t)$	ⓐ $\varphi(t) + 2t\varphi(t)\varphi'(t)$	ⓑ $\varphi(t)^2 + 2t\varphi(t)\varphi'(t)$

$\boxed{\mathbf{20}}$ の解答群

⓪ t	① t^2	② t^3	③ $\dfrac{1}{t}$	④ $\dfrac{1}{t^2}$	⑤ $\dfrac{1}{t^3}$
⑥ $-t$	⑦ $-t^2$	⑧ $-t^3$	⑨ $-\dfrac{1}{t}$	ⓐ $-\dfrac{1}{t^2}$	ⓑ $-\dfrac{1}{t^3}$

解説

点 $\mathrm{P} = (\varphi(t), \psi(t))$ は曲線 $C_t : y = tx^2 + \dfrac{1}{t}$ 上にあるので

$$\psi(t) = t\varphi(t)^2 + \frac{1}{t}$$

が成り立つ．この等式の両辺を t で微分すると

$$(**) \qquad \psi'(t) = \varphi(t)^2 + 2t\varphi(t)\varphi'(t) - \frac{1}{t^2}$$

が成り立つ．よって $\boxed{\mathbf{18}}$ の答えは ⓑ である．

曲線 $C : x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ の点 $\mathrm{P} = (\varphi(t), \psi(t))$ における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

である．また曲線 $C_t : y = tx^2 + \dfrac{1}{t}$ について $\dfrac{dy}{dx} = 2tx$ であるから $\mathrm{P} = (\varphi(t), \psi(t))$ における接線の傾きは $2t\varphi(t)$ である．これらが等しいので

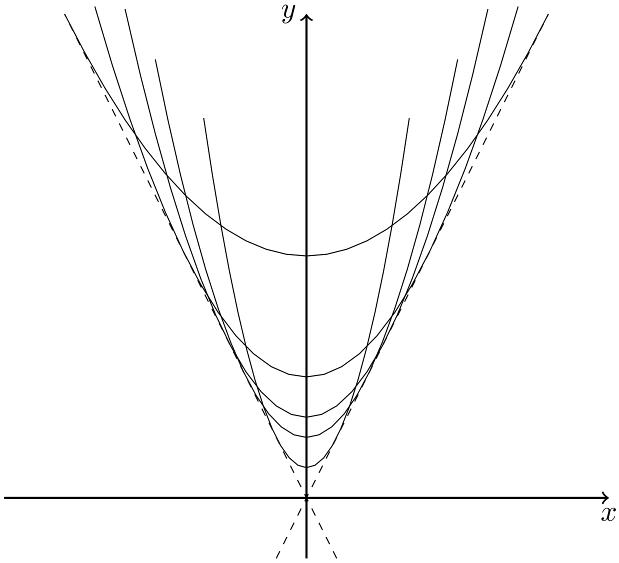
$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = 2t\varphi(t)$$

である．従って $\boxed{\mathbf{19}}$ の答えは ⓪ である．これより分母を払って $\psi'(t) = 2t\varphi(t)\varphi'(t)$ が成り立つことが分かる．これを $(**)$ に代入すると

$$\varphi(t)^2 = \frac{1}{t^2}$$

を得る．従って $\boxed{\mathbf{20}}$ の答えは ④ である．

参考までに，包絡線 $y = 2x$ と曲線 C_t $(t = 1/4, 1/2, 1, 3/2, 2)$ を図示すると下図のようになる．


y
x

第２分野　線形代数

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 **21** 〜 **37** 〕

(注意) 行列 A に対し，$\mathrm{rank}\,A$ は A の階数（ランク）を表す．また，1 次独立，1 次従属はそれぞれ線形独立，線形従属ともいう．

問 1 (1) 2 つのベクトル $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を考える．ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $c\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ が直交するように定数 c を定めると $c = \boxed{\mathbf{21}}$ である．このとき，$\boldsymbol{u}$ と $c\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ の大きさを 1 に正規化したものをそれぞれ $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ とすると，

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \boxed{\mathbf{22}}$$

である．

21 の解答群

⓪ 0　① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$

⑤ -1　⑥ $-\frac{1}{2}$　⑦ $-\frac{1}{3}$　⑧ $-\frac{1}{4}$

22 の解答群

⓪ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　① $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$　② $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

③ $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$　④ $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は 5 と $\boxed{\textbf{23}}$ である．また，ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\textbf{24}} \end{pmatrix}$ は固有値 5 に対する固有ベクトルである．

$\boxed{\textbf{23}}$ ・ $\boxed{\textbf{24}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
	⑤ -1	⑥ -2	⑦ -3	⑧ -4

解説

(1) ベクトル $\boldsymbol{u}$ と $c\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ が直交するための必要十分条件は内積 $\boldsymbol{u}\cdot(c\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=0$ である．$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} c \\ 1 \\ -c-1 \end{pmatrix}$ であるから

$$\boldsymbol{u}\cdot(c\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=1\times c+0\times 1+(-1)\times(-c-1)=2c+1=0$$

より $c=-\dfrac{1}{2}$ である．よって $\boxed{\textbf{21}}$ の答えは ⑥ である．

$c=-\dfrac{1}{2}$ のとき

$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であるから，これを正規化して

$$\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を得る．よって $\boxed{\textbf{22}}$ の答えは ③ である．

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の固有方程式を解くと

$$\begin{aligned} |A-\lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(3-\lambda)-2\times 4 \\ &= \lambda^2-4\lambda-5=(\lambda-5)(\lambda+1)=0 \end{aligned}$$

であるから, 固有値は $\lambda = 5, -1$ である．よって $\boxed{\textbf{23}}$ は ⑤ である．固有値 5 に対する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおけば $(A - 5E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ であるから

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

より $y = 2x$ である．$x = c_1$ とおくと $y = 2x = 2c_1$ であり

$$\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である．よって $\boxed{\textbf{24}}$ は ② である．

問 2　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ における 3 つのベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

が 1 次独立であるかどうかを調べる.

そこで, c_1, c_2, c_3 を未知数とする方程式 $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を考えると,

連立 1 次方程式

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 0 \\ c_1 + 4c_2 + 7c_3 = 0 \\ c_1 + 5c_2 + 9c_3 = 0 \end{cases}$$

を得る. これを解くと,

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \boxed{\textbf{25}} \\ \boxed{\textbf{26}} \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

を得る. 特に $t = 1$ とおくと,

$$\boldsymbol{a}_1 + \boxed{\textbf{25}}\,\boldsymbol{a}_2 + \boxed{\textbf{26}}\,\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$$

が成り立つので, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は $\boxed{\textbf{27}}$.

25 ・ **26** の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -3　⑨ -4　ⓐ -5

27 の解答群

⓪ 1 次独立である　① 1 次従属である

② 1 次独立であるとも 1 次従属であるとも言えない

解説

3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ について 3 つの定数 c_1, c_2, c_3 で $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を満たし, かつ $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$ であるものが存在すれば, $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属であると言う. また $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ を満たす定数が $(c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0)$ となる以外には存在しない時, 1 次独立であると言う.

$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立か 1 次従属であるかを調べる為に $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ とおく. この式を成分を用いて表せば連立方程式

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 + 5c_3 = 0 \\ c_1 + 4c_2 + 7c_3 = 0 \\ c_1 + 5c_2 + 9c_3 = 0 \end{cases}$$

を得る. これを掃き出し法（消去法）で解くと

1	3	5	
1	4	7	
1	5	9	3 行 −2 行
1	3	5	
1	4	7	2 行 −1 行
0	1	2	
1	3	5	
0	1	2	
0	1	2	3 行 −2 行
1	3	5	1 行 −3×2 行
0	1	2	
0	0	0	
1	0	-1	
0	1	2	
0	0	0	

よって $c_1 - c_3 = 0$, $c_2 + 2c_3 = 0$ を得る. $c_1 = t$ (t は任意定数) とおくと

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る. 従って $\boxed{\mathbf{25}}$ の答えは ⑦ であり $\boxed{\mathbf{26}}$ の答えは ① であり

特に $t=1$ と置けば $c_1=1,\ c_2=-2,\ c_3=1$ となり

$$\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{0}$$

が成り立つ．よって冒頭で述べた 1 次独立, 1 次従属の定義に従うと $\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属である．つまり $\boxed{\mathbf{27}}$ の答えは ① である．

問 3 行列 $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列 X^{-1} を求める.

$X = E + A$ (E は 3 次単位行列) と分解すると，$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，$A^3 = O$

(O は 3 次零行列) となる．したがって，$(E+A)(E-A+A^2) = \boxed{\mathbf{28}}$ より，

$$X^{-1} = \boxed{\mathbf{29}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \boxed{\mathbf{30}} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\mathbf{28}}$ ・ $\boxed{\mathbf{29}}$ の解答群

⓪ O

① E　② $E+A$　③ $E-A$

④ $E+A+A^2$　⑤ $E-A+A^2$　⑥ $E-A-A^2$

$\boxed{\mathbf{30}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ -1　⑥ -2　⑦ -3　⑧ -4

解説

n 次正方行列 M の逆行列 M^{-1} は $MM^{-1} = M^{-1}M = E_n$ (E_n は n 次単位行列) をみたす行列である．逆行列をもつような行列を正則行列という．n 次正則行列 M の逆行列を求める基本的な方法は次の通りである.

(1) M と n 次単位行列 E_n を横に並べた拡大行列 $(M\,E_n)$ を作る.

(2) 拡大行列を，行の基本変形操作を適当に行って $(E_n\,N)$ の形にする.

(3) N が求める M の逆行列となる.

しかしながら，この問題はこれとは別の方法で行列 X の逆行列を求める．
まず，$X = E + A$ と行列を分解すると，

$$A = X - E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

が得られる．これから，A^2, A^3 を計算すれば，それぞれ問題文の通りに

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = O$$

となる．これらの結果と単位行列の性質 $E^2 = E,\ AE = EA = A$ を用いると，

$$(E + A)(E - A + A^2) = E^2 - EA + A^2 + AE - A^2 + A^3 = E + A^3 = E.$$

したがって，$\boxed{\textbf{28}}$ は ① となる．ここで，$X = E + A$ であったことと逆行列の定義を思い出せば，$X^{-1} = E - A + A^2$ である．よって，$\boxed{\textbf{29}}$ は ⑤ となる．また，具体的に X^{-1} を計算すれば，

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから，$\boxed{\textbf{30}}$ は ⑤ となる．

一般に，ある自然数 m に対して $M^m = O_n$ (O_n は n 次零行列) となる n 次正方行列 M のことを冪零行列 (べきれいぎょうれつ，べきぜろぎょうれつ) という．M が冪零行列のときは $E_n + M$ は正則行列となり，その逆行列は $E_n - M + M^2 - \cdots + (-M)^{m-1}$ で与えられることが知られている．この問題はその事実の $m = 3$ の場合における具体例に相当することを確認してもらいたい．

問 4　連立１次方程式

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x - y + cz = 2 \\ 2x + cy - z = 1 \end{cases}$$

について考える．ただし，c は定数とする．この方程式の係数行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & c \\ 2 & c & -1 \end{pmatrix}$ であり，拡大係数行列は $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & c & 2 \\ 2 & c & -1 & 1 \end{pmatrix}$ である．

(1)　$c =$ **31** のとき，A と B の階数は等しくないので，方程式は **32** ．

(2)　$c =$ **33** のとき，A と B の階数はともに 2 なので，方程式は **34** ．

31 ・ **33** **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

⑤ −1　⑥ −2　⑦ −3　⑧ −4

32 ・ **34** **の解答群**

⓪ 解をもたない　① ただ１つの解をもつ　② 無数の解をもつ

解説

連立１次方程式の問題だが，この問題は具体的な解を求めるのではなく，パラメータ c の値によって変動する連立１次方程式の解の個数に焦点を当てている．行列 B は係数行列 A とベクトル ${}^t(3\,2\,1)$ を合わせたものなので, B の行基本操作だけ考えればよい．

$$B \xrightarrow{\text{(T1)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & c-2 & -1 \\ 0 & c+4 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{(T2)}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & c-2 & -1 \\ 0 & 0 & -(c-1)(c+3) & c-1 \end{pmatrix}$$

(T1) 第2行に第1行の -1 倍を足し，第3行に第1行の -2 倍を加える．

(T2) 第3行に第2行の $-(c+4)$ 倍を加える．

行列 B の階数とは，上記のように行基本操作を行ったときに得られる最後の行列（$\tilde{B}$ とおく）の1行すべてが 0 とはなっていない行の個数のことである．B の左から3列には A の各成分が入っているので，行列 $\tilde{B}$ の左から3列の部分を見れば A の階数もわかる．しかも，$\mathrm{rank}A \leqq \mathrm{rank}B$ ともなっていることに注意していただきたい．
さて，行列 $\tilde{B}$ を見ると，行列 A, B の階数はパラメータ c の値によって変化することがわかる．しかし，$\tilde{B}$ の第1行と第2行を見ると，0 ではない成分が少なくとも1つ存在することが c とは無関係にわかる．つまり，A と B の階数は 2 か 3 であることがわかる．
以下は各設問を見て解法を探していく．

(1) 条件 $\mathrm{rank}A \neq \mathrm{rank}B$ より，$\mathrm{rank}A = 2$ かつ $\mathrm{rank}B = 3$ であることがわかる．したがって，

$$(c-1)(c+3) = 0 \text{ かつ } c-1 \neq 0$$

となるので，$c = -3$ がこの場合に当てはまることがわかる．よって，$\boxed{\mathbf{31}}$ は ⑦ となる．また，このとき方程式は

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ \qquad y - 5z = -1 \\ \qquad\qquad 0 = -4 \end{cases}$$

と変形されるが，最後の行の式は成立し得ないので，この方程式は解をもたない．つまり，$\boxed{\mathbf{32}}$ は ⓪ となる．

(2) 条件 $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B = 2$ より，

$$(c-1)(c+3) = 0 \text{ かつ } c-1 = 0$$

となるので，条件に当てはまるのは $c = 1$ である．したがって，$\boxed{\mathbf{33}}$ は ① となる．また，このとき方程式は

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ \qquad y - z = -1 \\ \qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

と変形される．これを解けば，$x = 1, y = z - 1$ となり，y と z は一意的には定まらない，すなわちこの方程式の解は無数に存在する．したがって，$\boxed{\mathbf{34}}$ は ② となる．

問 5　実数 x に対し，

$$A = \begin{pmatrix} x+2 & x+1 \\ x^2 & x^2-1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2-x & 3 & 3 \\ 4 & 3-x & 5 \\ -4 & -4 & -6-x \end{pmatrix}$$

とおく．また，$|A|$, $|B|$ はそれぞれ A, B の行列式を表す．

(1)　$|A| = 0$ を満たす x をすべてあげると $\boxed{\mathbf{35}}$ である．

(2)　$|B| = 0$ を満たす x をすべてあげると $\boxed{\mathbf{36}}$ である．

(3)　$\mathrm{rank}\, A = 2$ かつ $|B| = 0$ を満たす x をすべてあげると $\boxed{\mathbf{37}}$ である．

$\boxed{35}$ ～ $\boxed{37}$ の解答群

⓪ -2	① -1	② 0	③ 1	④ 2
⑤ $-2,\ 1$	⑥ $-2,\ 2$	⑦ $-1,\ 0$	⑧ $-1,\ 2$	
⑨ $-2,\ -1,\ 2$	ⓐ $-1,\ 0,\ 2$	ⓑ $-1,\ 1,\ 2$	ⓒ $0,\ 1,\ 2$	

解説

この問題は，単に行列式を計算するだけでなく，未知数 x を含む行列式からなる方程式を解く，という複合的な問題である．

(1) 行列 A の行列式を計算すると，第 2 列から $(x+1)$ をくくり出して，

$$|A| = \begin{vmatrix} x+2 & x+1 \\ x^2 & (x+1)(x-1) \end{vmatrix} \overset{\text{(T1)}}{=} (x+1)\begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ x^2 & x-1 \end{vmatrix}$$
$$= (x+1)\{(x+2)(x-1) - x^2\} = (x+1)(x-2)$$

であるから，$|A| = 0$ を満たす x をすべてあげると $x = -1, 2$ となる．したがって，$\boxed{\mathbf{35}}$ は ⑧ である．

(2) B は 3 次正方行列なのでサラスの公式が使えるが，この問題ではそれを使うと x が入った複雑な式を計算することになってしまう．よって，(1) と同様に基本操作を用いて

$|B|$ を計算する.

$$|B| \overset{(T2)}{=} \begin{vmatrix} 2-x & 2-x & 2-x \\ 4 & 3-x & 5 \\ -4 & -4 & -6-x \end{vmatrix} \overset{(T3)}{=} (2-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3-x & 5 \\ -4 & -4 & -6-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{(T4)}{=} (2-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-x & 1 \\ 0 & 0 & -2-x \end{vmatrix} = (2-x)(1+x)(2+x)$$

(T2) 第 1 行に第 2 行と第 3 行を加える.

(T3) 第 1 行から $(2-x)$ をくくり出す.

(T4) 第 2 行に第 1 行の (-4) 倍, 第 3 行に第 1 行の 4 倍をそれぞれ加える.

したがって, $|B| = 0$ を満たす x をすべてあげると $x = -2, -1, 2$ なので, $\boxed{\textbf{36}}$ は ⑨ となる.

(3) 行列 A の階数が 2 であることと $|A| \neq 0$ となることは同値な条件である. このことに注意して与えられた 2 つの条件を満たす x をそれぞれ考えると,
rank $A = 2$ から (1) の結果より $x \neq -1$ かつ $x \neq 2$ が得られる. また, $|B| = 0$ から (2) の結果より $x = -2, -1, 2$
が得られる. 以上より, 2 つの条件を共に満たす x をすべてあげると $x = -2$ となるため, $\boxed{\textbf{37}}$ は ⓪ である.

第3分野　常微分方程式

〔問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{38}}$ ～ $\boxed{\mathbf{54}}$ 〕

(注意)　各問における $y,\ z$ は x の関数であり, y', z', y'' はそれぞれ導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．また，特殊解は特解ともいう．

問 1　(1)　微分方程式

$$y' = y^2 - 1$$

の一般解は，$y = \boxed{\mathbf{38}}$ である．

$\boxed{\mathbf{38}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{3}x^3 - x + C$	① $\log\lvert x^2 - 1\rvert + C$	② $\sin x + C$
③ $\sin^{-1} x + C$	④ $\tan x + C$	⑤ $\tan^{-1} x + C$
⑥ $2x + C$	⑦ $1 + Ce^x$	⑧ $-\dfrac{1}{2}(1 + Ce^x)$
⑨ $\sqrt{1 + Ce^x}$	ⓐ $\dfrac{C + 2x}{C - 2x}$	ⓑ $\dfrac{1 + Ce^{2x}}{1 - Ce^{2x}}$
ⓒ $\dfrac{1 + \log(2x + C)}{1 - \log(2x + C)}$	ⓓ $\dfrac{1 - \log(2x + C)}{1 + \log(2x + C)}$	

(C は任意定数)

(2)　微分方程式

$$y' + 2xy = x^2 e^{-x^2}$$

の一般解は，$y = \boxed{\textbf{39}}$ である．

$\boxed{\textbf{39}}$ の解答群

⓪ $Ce^{2x} + \dfrac{x^3}{3}$　① $\dfrac{x^3}{3}e^{-x} + C$　② $Ce^{-2x} + \dfrac{x^3}{3}$

③ $\dfrac{x^3}{3}e^{-2x} + C$　④ $Ce^{x^2} + \dfrac{x^3}{3}$　⑤ $\dfrac{x^3}{3}e^{x^2} + C$

⑥ $Ce^{-x^2} + \dfrac{x^3}{3}$　⑦ $\dfrac{x^3}{3}e^{-x^2} + C$　⑧ $e^{2x}\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right)$

⑨ $\dfrac{Cx^3}{3}e^{-x}$　ⓐ $e^{-2x}\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right)$　ⓑ $\dfrac{Cx^3}{3}e^{-2x}$

ⓒ $e^{x^2}\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right)$　ⓓ $\dfrac{Cx^3}{3}e^{x^2}$　ⓔ $e^{-x^2}\left(\dfrac{x^3}{3} + C\right)$

ⓕ $\dfrac{Cx^3}{3}e^{-x^2}$

(C は任意定数)

解説

(1) 微分方程式の両辺を $y^2 - 1$ で割ると

$$\frac{y'}{y^2 - 1} = 1.$$

さらに，両辺を x で積分するとそれぞれ

$$\begin{aligned}
\int \frac{y'}{y^2-1}dx &= \int \frac{1}{(y-1)(y+1)}dy \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C_1, \\
\int 1dx &= x + C_2 \qquad (C_1, C_2\text{は任意定数})
\end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + C' \qquad (C' \text{は任意定数}).$$

これを整理すれば，一般解

$$y = \frac{1+Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

が得られる．したがって， $\boxed{\mathbf{38}}$ の答えは，ⓑとなる．

(2) 微分方程式の両辺に積分因子 e^{x^2} をかけると

$$(e^{x^2}y)' = e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = x^2.$$

さらに，両辺を x で積分すると

$$e^{x^2}y = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

であるから，一般解は

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{x^3}{3} + C\right).$$

したがって， $\boxed{\mathbf{39}}$ の答えは，ⓔとなる．

問 2　微分方程式

$$(*) \qquad x e^{\frac{y}{x}} + y - xy' = 0, \quad x > 0$$

を考える．このとき，

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

とおくと $y' = \boxed{\mathbf{40}}$ となるから，$u(x)$ に関する微分方程式

$$(**) \qquad u' = \boxed{\mathbf{41}}$$

が得られる．この方程式 $(**)$ の一般解を求めると

$$u(x) = \boxed{\mathbf{42}}$$

である．したがって，$(*)$ の一般解は

$$y(x) = x \, \boxed{\mathbf{42}}$$

となる．

$\boxed{40}$ の解答群

⓪ u'	① $-u'$	② $u + u'$	③ $u - u'$
④ xu'	⑤ $-xu'$	⑥ $u + xu'$	⑦ $u - xu'$
⑧ $-u - u'$	⑨ $-u + u'$	ⓐ $-u - xu'$	ⓑ $-u + xu'$

$\boxed{41}$ の解答群

⓪ xu	① $-xu$	② e^{xu}	③ e^{-xu}	④ xe^{u}
⑤ xe^{-u}	⑥ $\dfrac{e^u}{x}$	⑦ $\dfrac{e^{-u}}{x}$	⑧ $x^2 e^u$	⑨ $x^2 e^{-u}$
ⓐ $\dfrac{e^u}{x^2}$	ⓑ $\dfrac{e^{-u}}{x^2}$			

$\boxed{42}$ **の解答群**

⓪ $C+\dfrac{1}{x}$	① $C-\dfrac{1}{x}$	② $\dfrac{C}{x}$
③ $-\dfrac{C}{x}$	④ $C+\log x$	⑤ $C-\log x$
⑥ $C+\log\lvert\log x\rvert$	⑦ $C-\log\lvert\log x\rvert$	⑧ $\log(C+\log x)$
⑨ $-\log(C+\log x)$	ⓐ $\log(C-\log x)$	ⓑ $-\log(C-\log x)$
ⓒ $\log\left(C+\dfrac{1}{x}\right)$	ⓓ $\log\left(C-\dfrac{1}{x}\right)$	ⓔ $-\log\left(C+\dfrac{1}{x}\right)$
ⓕ $-\log\left(C-\dfrac{1}{x}\right)$		

(C は任意定数)

解説　$u(x)=\dfrac{y(x)}{x}$ とおくと

$$y=xu,\qquad y'=(xu)'=u+xu'$$

であるから，微分方程式 $(*)$ は

$$xe^u+xu-x(u+xu')=0$$

と表される．これを整理すると，u に関する微分方程式

$$(**)\qquad u'=\frac{e^u}{x}$$

が得られる．方程式 $(**)$ の両辺を e^u で割り，さらに x で積分すると

$$-e^{-u}=\int e^{-u}du=\int e^{-u}u'dx=\int\frac{1}{x}dx=\log x+C'\qquad (C'\text{は任意定数})$$

が得られ，これを整理すると

$$u=-\log(C-\log x)\qquad (C\text{ は任意定数}).$$

したがって，$(**)$ の一般解は

$$y=xu=-x\log(C-\log x)$$

である．以上より，$\boxed{40}$，$\boxed{41}$，$\boxed{42}$ の答えはそれぞれ，⑥, ⑥, ⓑとなる．

問 3　微分方程式

$$(*) \qquad\qquad y'' - 4y = 8x - 4$$

について考える．

(1)　対応する同次方程式

$$y'' - 4y = 0$$

の一般解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{43}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{43}}$ **の解答群**

⓪ $C_1e^{4x} + C_2$　① $C_1e^{-4x} + C_2$　② $C_1e^{2x} + C_2$

③ $C_1e^{-2x} + C_2$　④ $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$　⑤ $(C_1 + C_2x)e^{2x}$

⑥ $C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

(C_1, C_2 は任意定数)

(2)　微分方程式 $(*)$ の特殊解を

$$y_p(x) = ax + b$$

とおくと,

$$a = \boxed{\mathbf{44}}, \quad b = \boxed{\mathbf{45}}$$

である.

$\boxed{44}$ ・ $\boxed{45}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ $\frac{1}{2}$

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -3　⑨ -4　ⓐ $-\frac{1}{2}$

(3)　(1), (2) より，微分方程式 $(*)$ の一般解は

$$y(x) = \boxed{\mathbf{46}}$$

である.

$\boxed{46}$ の解答群

⓪ $C_1e^{4x} + C_2 - 2x$　① $C_1e^{-4x} + C_2 - 8x$

② $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + 2x - 1$　③ $C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x + 1$

④ $(C_1 + C_2x)e^{2x} + 2x - 1$　⑤ $(C_1 + C_2x)e^{2x} - 2x + 1$

⑥ $C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 2x - 1$　⑦ $C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - 2x + 1$

(C_1, C_2 は任意定数)

解説

(1) 同次方程式 $y'' - 4y = 0$ に対して，特性方程式 $\lambda^2 - 4 = 0$ の解（根）は $\lambda = 2, -2$ であるから，一般解は

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} \qquad (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

である．したがって，$\boxed{\mathbf{43}}$ の答えは，④となる．

(2) 特殊解 $y_p(x) = ax + b$ は ${y_p}'(x) = a$，${y_p}''(x) = 0$ を満たすので，これらを方程式 $(*)$ に代入すると

$${y_p}'' - 4y_p = -4(ax + b) = -4ax - 4b = 8x - 4.$$

したがって，$a = -2, b = 1$ であるから，$\boxed{\mathbf{44}}$，$\boxed{\mathbf{45}}$ の答えはそれぞれ，⑦, ①となる．

(3) 解の重ね合わせの原理より，$(*)$ の一般解は対応する同次方程式の一般解 y_h と $(*)$ の特殊解 y_p の和，すなわち

$$y(x) = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - 2x + 1 \qquad (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

と表される．したがって，$\boxed{\mathbf{46}}$ の答えは，③となる．

問 4　未知関数 $y(x), z(x)$ に関する微分方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = -2y + z \\ z' = \ \ ay \end{cases}$$

を考える．ただし，a は定数とする．

(1)　$(*)$ の 2 つの方程式から z を消去し，y に関する単独の 2 階微分方程式を導くと，

$$(**) \qquad y'' + 2y' + \boxed{\mathbf{47}}\, y = 0.$$

(2)　方程式 $(**)$ の特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + \boxed{\mathbf{47}} = 0$ が重解を持つのは $a = \boxed{\mathbf{48}}$ のときである．

$\boxed{\mathbf{47}}$ ・ $\boxed{\mathbf{48}}$ **の解答群**

⓪ 0

① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ 3　⑥ -3

⑦ 4　⑧ -4　⑨ a　ⓐ $-a$　ⓑ $2a$　ⓒ $-2a$

(3)　$a = \boxed{\mathbf{48}}$ のとき，方程式 $(**)$ の一般解は $y = \boxed{\mathbf{49}}$ であり，初期条件 $y(0) = 2, y'(0) = 1$ を満たす解は $y = \boxed{\mathbf{50}}$ である．また，この初期条件のもとで $z = \boxed{\mathbf{51}}$ が得られる．

$\boxed{\mathbf{49}}$ **の解答群**

⓪ $C_1e^x + C_2$　① $C_1e^{-x} + C_2$　② $C_1e^x + C_2e^{-x}$

③ $(C_1x + C_2)e^x$　④ $(C_1x + C_2)e^{-x}$　⑤ $C_1 \cos x + C_2 \sin x$

⑥ $(C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^x$　⑦ $(C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{-x}$

(C_1, C_2 は任意定数)

$\boxed{\mathbf{50}}$ **の解答群**

⓪ $e^x + 1$　① $-e^x + 3$　② $\dfrac{1}{2}(3e^x + e^{-x})$

③ $\dfrac{1}{2}(e^x + 3e^{-x})$　④ $(-x+2)e^x$　⑤ $(3x+2)e^x$

⑥ $(x+2)e^{-x}$　⑦ $(3x+2)e^{-x}$　⑧ $2\cos x + \sin x$

⑨ $\cos x + 2\sin x$

$\boxed{\mathbf{51}}$ **の解答群**

⓪ $3e^x + 2$　① $-3e^x + 6$　② $\dfrac{1}{2}(9e^x + e^{-x})$

③ $\dfrac{3}{2}(e^x - e^{-x})$　④ $(-3x+5)e^x$　⑤ $9(x+1)e^x$

⑥ $(x+3)e^{-x}$　⑦ $(3x+5)e^{-x}$　⑧ $5\cos x$

⑨ $3\sin x$

(4)　$a <$ $\boxed{\mathbf{48}}$ のとき，初期条件 $y(0) = 2, y'(0) = 1$ を満たす方程式 $(**)$ の解 $y(x)$ は $x \to \infty$ のとき $\boxed{\mathbf{52}}$ ．

$\boxed{\mathbf{52}}$ **の解答群**

⓪ 0に収束する　① 1に収束する

② $+\infty$ に発散する　③ $-\infty$ に発散する

解説

(1) $(*)$ において，第1式の両辺を微分し，第2式を代入すると

$$y'' = (-2y+z)' = -2y' + z' = -2y' + ay,$$

すなわち，

$$(**) \qquad y'' + 2y' - ay = 0$$

が得られる．したがって，$\boxed{\mathbf{47}}$ の答えは，ⓐとなる．

(2) $(**)$ の特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda - a = 0$ は，$a = -1$ のとき重解（重根） $\lambda = -1$ を持つ．したがって，$\boxed{\mathbf{48}}$ の答えは，②となる．

(3) $a = -1$ のとき，方程式 $y'' + 2y' + 1 = 0$ の一般解は，(2) より，

$$y = (C_1 x + C_2)e^{-x} \qquad (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

である．また，

$$y' = \{(C_1 x + C_2)e^{-x}\}' = \{C_1(1-x) - C_2\}e^{-x}$$

であるから，初期条件を満たす解は

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 2 \\ y'(0) = C_1 - C_2 = 1 \end{cases}$$

より，$C_1 = 3$, $C_2 = 2$, すなわち，

$$y = (3x+2)e^{-x}$$

となる．また，この初期条件のもとで

$$z = 2y + y' = 2(3x+2)e^{-x} + \{3(1-x) - 2\}e^{-x} = (3x+5)e^{-x}.$$

したがって，$\boxed{\mathbf{49}}$，$\boxed{\mathbf{50}}$，$\boxed{\mathbf{51}}$ の答えはそれぞれ，④, ⑦, ⑦ となる．

(4) $(**)$ の特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda - a = 0$ の判別式

$$D = 2^2 - 4(-a) = 4(a+1)$$

は，$a < -1$ のとき負となり，解（根）は

$$\lambda = -1 \pm i\sqrt{-(a+1)}$$

であたえられる．このとき，$(**)$ の一般解は

$$y(x) = e^{-x}\left(C_1 \cos\sqrt{-(a+1)}x + C_2 \sin\sqrt{-(a+1)}x\right) \qquad (C_1, C_2\text{は任意定数})$$

であり，初期条件によらず $y(x) \to 0$ $(x \to \infty)$. したがって，$\boxed{\mathbf{52}}$ の答えは，⓪ となる．

問 5　xy 平面において，原点を頂点とし，x 軸を対称軸にもつすべての放物線を表す微分方程式を求める．これらの放物線は，0 でない任意の定数 a を用いて，

$$(*) \qquad x = ay^2$$

と表される．y を x の関数と考えて，方程式 $(*)$ の両辺を x で微分すると

$$(**) \qquad y' = \boxed{\mathbf{53}}$$

が得られる．さらに，方程式 $(*)$ と $(**)$ から a を消去すると，微分方程式

$$y' = \boxed{\mathbf{54}}$$

が得られる．

$\boxed{\mathbf{53}}$ の解答群

⓪ ax　① ay　② $2ax$　③ $2ay$　④ $\dfrac{x}{a}$　⑤ $\dfrac{y}{a}$

⑥ $\dfrac{x}{2a}$　⑦ $\dfrac{y}{2a}$　⑧ $\dfrac{1}{ax}$　⑨ $\dfrac{1}{ay}$　ⓐ $\dfrac{1}{2ax}$　ⓑ $\dfrac{1}{2ay}$

$\boxed{\mathbf{54}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{y}{x}$　① $\dfrac{x}{y}$　② $\dfrac{y}{2x}$　③ $\dfrac{2x}{y}$

④ $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$　⑤ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$　⑥ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$　⑦ $2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$

⑧ y^2　⑨ $\dfrac{y^2}{2}$　ⓐ $\dfrac{y^3}{x}$　ⓑ $\dfrac{y^3}{2x}$

解説　方程式 $(*)$ の両辺を x で微分すると

$$1 = (ay^2)' = 2ayy'$$

であるから，

$$(**) \qquad y' = \frac{1}{2ay}$$

が得られる．さらに，$(*)$ より $a = \dfrac{x}{y^2}$ であることを用いると，微分方程式

$$y' = \frac{1}{2\left(\dfrac{x}{y^2}\right)y} = \frac{y}{2x}$$

が得られる．したがって，$\boxed{\mathbf{53}}$，$\boxed{\mathbf{54}}$ の答えはそれぞれ，ⓑ, ② となる．

第4分野　確率・統計

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{55}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{72}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$, $D(X)$ はそれぞれ X の期待値 (平均，平均値)，分散，標準偏差を表す．$\emptyset$ は空事象を表す.

問 1 (1) 確率変数 X, Y の確率分布がそれぞれ,

X の値	-3	-2	0	2	3
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	a	$\frac{1}{6}$

Y の値	-6	-4	0	4	6
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	a	$\frac{1}{6}$

（a は定数）

で与えられているとき，$a = \boxed{\mathbf{55}}$ であり，$E(X^2) = \boxed{\mathbf{56}}$ である．また，Y と $2X$ の確率分布が等しくなることから，$V(Y) = \boxed{\mathbf{57}}$ である.

$\boxed{55}$ 〜 $\boxed{57}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{6}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{2}$

⑥ 2　⑦ 4　⑧ 6　⑨ 8　ⓐ 16　ⓑ 24

(2) 2 つの事象 A, B に対し，事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A|B)$ で表す．$P(B)=\dfrac{1}{8}$，$P(A|B)=P(A)=\dfrac{1}{4}$ とすると，A と B は $\boxed{\textbf{58}}$ から，$P(B|A)=\boxed{\textbf{59}}$ である．さらに，$P(A\cup B)=\boxed{\textbf{60}}$ である．

$\boxed{\textbf{58}}$ の解答群

⓪ 独立である　　① 従属である（独立ではない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

$\boxed{\textbf{59}}$・$\boxed{\textbf{60}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{32}$　③ $\dfrac{1}{8}$　④ $\dfrac{5}{32}$　⑤ $\dfrac{7}{32}$

⑥ $\dfrac{1}{4}$　⑦ $\dfrac{11}{32}$　⑧ $\dfrac{1}{2}$　⑨ $\dfrac{5}{8}$　ⓐ $\dfrac{3}{4}$

解説

(1) 確率の合計が 1 であることから，

$$a=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{8}$$

を得る．また，

$$E(X^2)=(-3)^2\cdot\frac{1}{6}+(-2)^2\cdot\frac{1}{8}+0^2\cdot\frac{5}{12}+2^2\cdot\frac{1}{8}+3^2\cdot\frac{1}{6}=4$$

であるから，$\boxed{\textbf{55}}$，$\boxed{\textbf{56}}$ の答えは順に，②, ⑦となる．期待値 $E(X)$ は，

$$E(X)=(-3)\cdot\frac{1}{6}+(-2)\cdot\frac{1}{8}+0\cdot\frac{5}{12}+2\cdot\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{6}=0$$

であるから，公式 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ を用いると，

$$V(X)=E(X^2)=4$$

がわかる．Y についても同様の計算を繰り返してもよいが，Y と $2X$ の確率分布が等しいので，$V(Y)=V(2X)=2^2V(X)=16$ として求めることができる．$\boxed{\textbf{57}}$ の答えは ⓐ となる．

(2) 2 つの事象の独立性に関する問題である．一般に，2 つの事象 A, B は，$P(A\cap B)=P(A)P(B)$ が成り立つとき独立であり，成り立たないとき従属である．また，$P(A)\neq 0$

のとき，A と B が互いに独立であることと，$P(B) = P(B|A)$ は同値となる．このことに注意すると，この問題では $P(A|B) = P(A)$ が成り立っているので，事象 A と B は独立であることがわかる．したがって，$P(B|A) = P(B) = \dfrac{1}{8}$ である．また，

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

であり，A と B が独立であることから

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}.$$

したがって，

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

となる．したがって，$\boxed{\mathbf{58}}$ ～ $\boxed{\mathbf{60}}$ の答えは順に ⓪, ③, ⑦ である．

問 2　確率変数 X の分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ が

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ (x+1)^2, & -1 \leqq x \leqq 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

で与えられているとき，$P\Bigl(X > -\dfrac{1}{2}\Bigr) = \boxed{\textbf{61}}$ である．また，確率密度関数を $f(x)$ とすると，

$$f(x) = \boxed{\textbf{62}}, \quad -1 < x < 0$$

で，$E(X) = \boxed{\textbf{63}}$ である．

61 の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{3}{4}$　⑥ 1

62 の解答群

⓪ $\dfrac{2}{3}(x+1)^3$　① $\dfrac{2}{3}(x+1)^3 - 1$　② $2(x+1)$

③ $2x+1$

63 の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{2}{3}$　⑤ $\dfrac{3}{4}$

⑥ $-\dfrac{1}{4}$　⑦ $-\dfrac{1}{3}$　⑧ $-\dfrac{1}{2}$　⑨ $-\dfrac{2}{3}$　ⓐ $-\dfrac{3}{4}$

解説

題意より，

$$P(X \leqq -\frac{1}{2}) = F\bigl(-\frac{1}{2}\bigr) = \Bigl(-\frac{1}{2}+1\Bigr)^2 = \frac{1}{4}$$

であるから，$P\bigl(X > -\dfrac{1}{2}\bigr) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$ となる．また，確率密度関数の定義から，

$$f(x) = F'(x) = 2(x+1), \quad -1 < x < 0$$

を得るので，

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} 2x(x+1)\,dx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^3 + x^2\right]_{-1}^{0} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

となる．従って，$\boxed{\textbf{61}}$ 〜 $\boxed{\textbf{63}}$ の答えは順に，⑤, ②, ⑦となる．

問 3　3つの確率変数 X, Y, Z がすべて区間 $[-2, 4]$ 上の一様分布に従っているとする．このとき，$P(1 \leqq X \leqq 3) =$ **64** , $E(X) =$ **65** である．X, Y, Z が互いに独立であるとし，この3つのうち区間 $[1, 3]$ 内に値をとるものの個数を N とすると，N は **66** に従い，$P(N = 2) =$ **67** である．

64 ・ **65** の解答群

⓪ 0	① $\frac{1}{2}$	② $\frac{1}{3}$	③ $\frac{2}{3}$	④ $\frac{1}{4}$	⑤ $\frac{3}{4}$
⑥ $\frac{1}{5}$	⑦ $\frac{2}{5}$	⑧ $\frac{3}{5}$	⑨ $\frac{4}{5}$	ⓐ 1	ⓑ 2

66 の解答群

⓪ 一様分布	① 2項分布	② ポアソン分布	③ 正規分布
④ 指数分布	⑤ t 分布		

67 の解答群

⓪ 0	① $\frac{1}{9}$	② $\frac{2}{9}$	③ $\frac{4}{9}$	④ $\frac{8}{9}$	⑤ $\frac{1}{3}$	⑥ $\frac{2}{3}$

解説

一般に，確率変数 U が区間 $[a, b]$ 上の一様分布に従っているとき，確率 $P(c \leqq U \leqq d), a \leqq c < d \leqq b$ の値は，全区間 $[a, b]$ に対する区間 $[c, d]$ の長さの比に等しいことに注意すると，$P(1 \leqq X \leqq 3) = \dfrac{3-1}{4-(-2)} = \dfrac{1}{3}$ である．また期待値 $E(X)$ は区間 $[-2, 4]$ の中央の値 $\dfrac{(-2)+4}{2} = 1$ となる．

さらに，X, Y, Z が同じ確率分布に従っていることから，

$$P(1 \leqq Y \leqq 3) = P(1 \leqq Z \leqq 3) = \frac{1}{3}$$

である．従って N は,「表が $\dfrac{1}{3}$ の確率で出る硬貨を 3 回投げたときに表が出た硬貨の枚数」と同等に考えることができるので，2項分布 $B(3, \dfrac{1}{3})$ に従っている．これから，

$$P(N = 2) = {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

となる．以上より，**64** ～ **67** の答えは順に ②, ⓐ, ①, ②となる．

問 4　B 工場では，工作機械を用いてある製品を作っている．この機械で作られる製品の質量は平均 350 g，標準偏差 1 g の正規分布に従っていた．この工作機械を更新したので，更新前と同様の製品が作られているか調べることにした．
更新後の工作機械で作られる製品の質量は，平均 μ g，標準偏差 1 g の正規分布に従っているものとする．このとき，有意水準 3% として，

帰無仮説 H_0：$\mu = 350$,

対立仮説 H_1：$\mu \neq 350$

の両側検定を行う．更新後の機械で作られた製品の中から無作為に 36 個を取り出し，それらの質量を $X_1, X_2, \ldots, X_{36}$ とすると，標本平均

$$\overline{X} = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} X_i$$

は平均 $\boxed{\mathbf{68}}$，標準偏差 $\boxed{\mathbf{69}}$ の $\boxed{\mathbf{70}}$ に従うので，帰無仮説 H_0 のもとでは，

$$Z = \frac{\overline{X} - 350}{\boxed{\mathbf{69}}}$$

は平均 0，標準偏差 $\boxed{\mathbf{71}}$ の正規分布に従う．したがって，正規分布表から $P(|Z| \geqq 2.17) \fallingdotseq 0.03$ がわかる．一方，取り出した 36 個の製品の質量を計測したところ，$\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = 350.4$ g であったので，H_0 は有意水準 3% で $\boxed{\mathbf{72}}$.

$\boxed{68}$ ・ $\boxed{69}$ の解答群

⓪ 1　① μ　② 6　③ 6μ　④ 36　⑤ 36μ　⑥ $\frac{1}{36}$

⑦ $\frac{\mu}{36}$　⑧ $\frac{1}{6}$　⑨ $\frac{\mu}{6}$

$\boxed{70}$ の解答群

⓪ 一様分布　① 2 項分布　② ポアソン分布　③ 正規分布

④ 指数分布　⑤ t 分布

71 の解答群

⓪ 0	① $\frac{1}{36}$	② $\frac{1}{18}$	③ $\frac{1}{9}$	④ $\frac{1}{6}$	⑤ 1
⑥ 2	⑦ 4	⑧ 6	⑨ 9	ⓐ 18	ⓑ 36

72 の解答群

⓪ 棄却される　　① 採択される

解説

一般に，正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従っている独立な確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ に対し，

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N\big(m, \frac{1}{n}\sigma^2\big)$$

であるから，題意より $\overline{X}$ は $E(\overline{X}) = \mu$, $V(\overline{X}) = \frac{1}{36}$ である正規分布に従う．標準偏差を $D(\overline{X})$ で表すと，$D(\overline{X}) = \frac{1}{6}$ となる．これから， $\boxed{68}$ 〜 $\boxed{70}$ の答えは順に ①, ⑧, ③ となる．

一般に，正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従っている確率変数 X に対して，

$$\frac{X - m}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

であるから，Z は標準正規分布に従う．従って，

$$P(|Z| \geqq 2.17) = P(|\overline{X} - 350| \geqq \frac{1}{6} \times 2.17) = P(|\overline{X} - 350| \geqq 0.36\cdots) \fallingdotseq 0.03$$

と $|\overline{x} - 350| = 0.4 > 0.36\cdots$ から，H_0 は有意水準 3% で棄却される．以上から，$\boxed{71}$, $\boxed{72}$ の答えは順に ⑤, ⓪となる．