EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2011年度 工学系数学統一試験 問題の解説

2011年12月10日（土）

4分野受験 午後1時30分 ～ 午後4時10分

3分野受験 午後1時30分 ～ 午後3時30分

2分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時50分

1分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時10分

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選んでその記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には Ⓘ をマークすること．例えば， $\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 Ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， $\boxed{\mathbf{23}}$ は ($\boxed{\mathbf{23}}$) という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2 -$ $\boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数とする．

目次

第1分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{16}}$ 〕

(注意)　$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ はそれぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$，$\arctan x$ と書き表されることもある． 各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$,　$0 \leqq \cos^{-1}x \leqq \pi$,　$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問 1　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^3}{x^2} = \boxed{\mathbf{1}}$ である．

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{1-\sin x} = \boxed{\mathbf{2}}$ である．

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪　0

①　$\dfrac{1}{3}$　②　$\dfrac{1}{2}$　③　1　④　$\dfrac{3}{2}$　⑤　2　⑥　$\dfrac{5}{2}$　⑦　3　⑧　∞

⑨　$-\dfrac{1}{3}$　ⓐ　$-\dfrac{1}{2}$　ⓑ　-1　ⓒ　$-\dfrac{3}{2}$　ⓓ　-2　ⓔ　$-\dfrac{5}{2}$　ⓕ　-3　ⓖ　$-\infty$

解説

(1)　$x\to\infty$ のときの関数 $\dfrac{(\log x)^3}{x^2}$ の極限は，分子 $=(\log x)^3\to\infty$，分母 $=x^2\to\infty$ となり，不定形になる．そこでロピタルの定理を適用し，分子，分母をそれぞれ微分して極限をとる．

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^3}{x^2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{((\log x)^3)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{3(\log x)^2\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3(\log x)^2}{2x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(3(\log x)^2)'}{(2x^2)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{6(\log x)\frac{1}{x}}{4x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3\log x}{2x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(3\log x)'}{(2x^2)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}}{4x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{4x^2} = 0
\end{aligned}
$$

このように，分子または分母の少なくとも一方が確定した極限値をとるまでロピタルの定理を繰り返し適用する．以上より，$\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ⓪である．

(2) $x \to \frac{\pi}{2}$ のときの関数 $\frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{1-\sin x}$ の極限は，分子 $=(x-\frac{\pi}{2})^2 \to 0$，分母 $=1-\sin x \to 0$ となり，不定形になる．(1) と同様にロピタルの定理を適用する．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{1-\sin x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{((x-\frac{\pi}{2})^2)'}{(1-\sin x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2(x-\frac{\pi}{2})}{-\cos x} \\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(2(x-\frac{\pi}{2}))'}{(-\cos x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sin x} = 2\end{aligned}$$

よって， $\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは ⑤である．

問 2 $f(x)=\log(1+x)$ が $x=0$ の近くで 2 次式 $P(x)=a+bx+cx^2$ により近似されるとは

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-P(x)}{x^2} = 0$$

が成り立つことである．係数 a, b, c を求めるのに，$f(x)$ のマクローリン展開 ($x=0$ を中心とするテイラー展開) を用いると $a=$ $\boxed{\mathbf{3}}$, $b=$ $\boxed{\mathbf{4}}$, $c=$ $\boxed{\mathbf{5}}$ となる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ ～ $\boxed{\mathbf{5}}$ の解答群

⓪ 0

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2 ⑥ $\frac{5}{2}$ ⑦ 3 ⑧ ∞

⑨ $-\frac{1}{3}$ ⓐ $-\frac{1}{2}$ ⓑ -1 ⓒ $-\frac{3}{2}$ ⓓ -2 ⓔ $-\frac{5}{2}$ ⓕ -3 ⓖ $-\infty$

解説

マクローリンの定理から，ランダウの記号を用いれば，$x=0$ の近傍で

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$$

と書ける．2 次式を

$$P(x) = a + bx + cx^2$$

とおいているので

$$a = f(0), \qquad b = f'(0), \qquad c = \frac{f''(0)}{2}$$

となる．ここで $f(x)=\log(1+x)$ より

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

なので

$$a = 0, \qquad b = 1, \qquad c = -\frac{1}{2}$$

である．したがって，$\boxed{\textbf{3}}$，$\boxed{\textbf{4}}$，$\boxed{\textbf{5}}$ の答えは順に⓪，③，ⓐ である．

問 3 不定積分

$$I = \int \frac{2x(x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$$

を求める．被積分関数は

$$\frac{2x(x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{\boxed{\textbf{6}}}{(x-1)^2} + \frac{\boxed{\textbf{7}}}{x-1} + \boxed{\textbf{8}}\,\frac{x+1}{x^2+1}$$

と部分分数に展開されるので

$$\begin{cases} \displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \boxed{\textbf{9}} \\ \displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \boxed{\textbf{10}} \\ \displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \boxed{\textbf{11}} \end{cases}$$

(積分定数は省略)

を用いて I を求めることができる．

$\boxed{\textbf{6}}$ ～ $\boxed{\textbf{8}}$ の解答群

⓪ 0

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2　⑥ $\frac{5}{2}$　⑦ 3

⑧ $-\frac{1}{3}$　⑨ $-\frac{1}{2}$　ⓐ -1　ⓑ $-\frac{3}{2}$　ⓒ -2　ⓓ $-\frac{5}{2}$　ⓔ -3

$\boxed{\textbf{9}}$ ～ $\boxed{\textbf{11}}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{x-1}$　① $-\frac{1}{x-1}$　② $\frac{1}{(x-1)^2}$　③ $-\frac{1}{(x-1)^2}$

④ $\frac{2x}{(x^2+1)^2}$　⑤ $-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$　⑥ $\log|x-1|$　⑦ $-\log|x-1|$

⑧ $\sin^{-1}x$　⑨ $-\sin^{-1}x$　ⓐ $\cos^{-1}x$　ⓑ $-\cos^{-1}x$

ⓒ $\tan^{-1}x$　ⓓ $-\tan^{-1}x$

解説　一般に $f(x)$, $g(x)$ を x の整式 (多項式) とするとき $f(x)/g(x)$ の形の関数を有理関数という．有理関数の不定積分はそれを部分分数に分解 (または展開) して計算することができる．また $f(x)$ 次数が $g(x)$ の次数より小さくない場合には，まず $f(x)$ を $g(x)$ で割り算して分子の次数を $g(x)$ の次数より小さくしておいてから部分分数に分解するとよい．

$$\frac{2x(x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

を満たすように定数 A, B, C, D を求めればよい．両辺に $(x-1)^2(x^2+1)$ をかけると

$$(*) \qquad 2x(x+1) = A(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

したがって

$$2x^2 + 2x = (B+C)x^3 + (A-B-2C+D)x^2 + (B+C-2D)x + A - B + D$$

両辺の多項式の係数をそれぞれ比較して次の方程式を得る．

$$\begin{cases} B+C & = & 0 \\ A-B-2C+D & = & 2 \\ B+C-2D & = & 2 \\ A-B+D & = & 0 \end{cases}$$

これを解いて $A=2$, $B=1$, $C=-1$, $D=-1$ を得る．($(*)$ の x に例えば $0, -1, 1, 2$ を代入して A, B, C, D を求める方法もある)．したがって

$$\frac{2x(x+1)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+1}$$

となるので $\boxed{\mathbf{6}}$ の解答は 2 で ⑤, $\boxed{\mathbf{7}}$ の解答は 1 で ③, $\boxed{\mathbf{8}}$ の解答は -1 で ⓐ である．次に各項を不定積分すると

$$\begin{cases} I_1 & = & \displaystyle\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = -\frac{1}{x-1} \\ I_2 & = & \displaystyle\int \frac{1}{x-1}dx = \log|x-1| \\ I_3 & = & \displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \tan^{-1} x \end{cases}$$

したがって $\boxed{\mathbf{9}}$ の解答は $-\dfrac{1}{x-1}$ で ①, $\boxed{\mathbf{10}}$ の解答は $\log|x-1|$ で ⑥, $\boxed{\mathbf{11}}$ の解答は $\tan^{-1} x$ で ⓒ である．

問 4　定数 R は $R>2$ を満たすとし，xy 平面上の集合 $\{(x,y) \mid x^2+y^2<R^2\}$ で定義された関数 $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ を考える．

(1)　$f(x,y)$ の偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boxed{\textbf{12}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \boxed{\textbf{13}}$$

であり，

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \boxed{\textbf{14}}$$

である．

$\boxed{\textbf{12}}$ ・ $\boxed{\textbf{13}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　① $\dfrac{2x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　② $\dfrac{x}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

③ $-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　④ $-\dfrac{2x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　⑤ $-\dfrac{x}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

⑥ $\dfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　⑦ $\dfrac{2y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　⑧ $\dfrac{y}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

⑨ $-\dfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　ⓐ $-\dfrac{2y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　ⓑ $-\dfrac{y}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

$\boxed{\textbf{14}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　① $\dfrac{2R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$　② $\dfrac{R}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$

③ $\dfrac{R}{R^2-x^2-y^2}$　④ $\dfrac{2R}{R^2-x^2-y^2}$　⑤ $\dfrac{R}{2(R^2-x^2-y^2)}$

(2)　集合 D を　$D=\{(x,y) \mid 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\}$ とし，重積分

$$I = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$$

を求める．極座標を利用して計算すると $I = \boxed{\textbf{15}}$ である．

$\boxed{15}$ の解答群

⓪ $2\pi R\sqrt{R^2-3}$　① $2\pi R\left(\sqrt{R^2-1}-\sqrt{R^2-4}\right)$

② $\dfrac{2\pi R^2}{\sqrt{R^2-3}}$　③ $\dfrac{2\pi R^2}{\sqrt{R^2-1}-\sqrt{R^2-4}}$

④ $2\pi R\left(R^2-3\right)$　⑤ $2\pi R\left(\sqrt{R^2-1}-\sqrt{R^2-2}\right)$

さらに，R が大きくなったときの積分値 I の極限は，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} I = \boxed{16}$ である．

$\boxed{16}$ の解答群

⓪ 0　① π　② 2π　③ 3π　④ 4π　⑤ 5π　⑥ 6π　⑦ ∞

解説

(1)　関数 $f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ は合成関数

$$f(x,y)=h(u(x,y))\qquad \text{ただし，}\quad h(u)=\sqrt{u},\quad u(x,y)=R^2-x^2-y^2$$

とみなせる．合成関数の偏微分の公式より

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{dh}{du}\,\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{u}}=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

f は x と y について対称な関数形をしているから同様にして

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

である．

次に，

$$1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}=\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}$$

であるから，

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

(2) 積分領域 D は円環領域であるから極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を行う．これにより D は矩形領域 $\hat{D} = \{(r,\theta) \mid 1 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\}$ に写る．

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy = \iint_{\hat{D}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| dr\, d\theta \\
&= \iint_{\hat{D}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \frac{R\, r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[-R\sqrt{R^2 - r^2}\, \Big]_{r=1}^{r=2} d\theta \\
&= 2\pi R \left(\sqrt{R^2 - 1} - \sqrt{R^2 - 4} \right)
\end{aligned}
$$

次に，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} I$ は $\infty - \infty$ の不定極限になるから，変形

$$
\sqrt{R^2 - 1} - \sqrt{R^2 - 4} = \frac{(R^2 - 1) - (R^2 - 4)}{\sqrt{R^2 - 1} + \sqrt{R^2 - 4}} = \frac{3}{\sqrt{R^2 - 1} + \sqrt{R^2 - 4}}
$$

を使う．

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} I &= \lim_{R\to\infty} \frac{6\,\pi\, R}{\sqrt{R^2 - 1} + \sqrt{R^2 - 4}} = \lim_{R\to\infty} \frac{6\pi}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{R^2}} + \sqrt{1 - \dfrac{4}{R^4}}} \\
&= \frac{6\pi}{2} = 3\pi
\end{aligned}
$$

以上から， $\boxed{\mathbf{12}}$ は ③， $\boxed{\mathbf{13}}$ は ⑨， $\boxed{\mathbf{14}}$ は ⓪， $\boxed{\mathbf{15}}$ は ①， $\boxed{\mathbf{16}}$ は ③.

第２分野　線形代数

〔 問１〜問４： 解答番号 $\boxed{\mathbf{17}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{31}}$ 〕

問１ (1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\boxed{\mathbf{17}}$ である.

$\boxed{\mathbf{17}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ① $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ② $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ④ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{\mathbf{18}}$ である.

$\boxed{\mathbf{18}}$ **の解答群**

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 6　⑥ 8　⑦ 10　⑧ 12

⑨ -1　ⓐ -2　ⓑ -3　ⓒ -4　ⓓ -6　ⓔ -8　ⓕ -10　ⓖ -12

解説

(1) 問題の行列を A とおく．行列 A の逆行列 A^{-1} を求めるには次の掃き出し法を用いると簡単である．

$$(A,I)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\qquad 1\text{ 行 }\times(-1)+3\text{ 行}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&-1&0&-1&0&1\end{array}\right)\qquad \begin{array}{l}2\text{ 行 }\times(-1)+1\text{ 行}\\2\text{ 行 }+3\text{ 行}\end{array}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)\qquad 3\text{ 行 }\times(-1)+2\text{ 行}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&-1&1&1\end{array}\right)=(I,A^{-1})$$

よって求める逆行列は

$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

であり，$\boxed{\mathbf{17}}$ の答えは ④ である．

掃き出し法の理論的背景

逆行列は，理論的には行列式と余因子行列を計算すれば求められる．しかし，この方法では次数とともに計算量が膨大になっていく．

逆行列の実用的な計算法として一般に用いられるのは，掃き出し法（ガウスの消去法）である．この方法では，前進消去と後退代入という 2 つの段階を経て計算される．計算機で掃き出し法を実行するのはなんの問題もないが，紙と鉛筆で実行するにはやはり重い計算になる．筆算による逆行列の求め方としていろいろな工夫が知られている．3 次の場合は次のように計算すればよい．

A を 3 次の正方行列とし，その逆行列を X とする．X を構成する列ベクトルを

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ とすると

$$A\,\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad A\,\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad A\,\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

が成り立つ．そこで，A に対して不定文字 a, b, c を含む 1 次方程式

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

を解き，その解に含まれる a, b, c に特定の値を代入することにより，X の列ベクトルが求められる．例えば $a = 1, b = c = 0$ とおくことにより $\boldsymbol{x}_1$ を得る．

問題で与えられた 3 次の正方行列 A に対応する連立 1 次方程式は,

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & a \\ & & y & + & z & = & b \\ x & & & + & z & = & c \end{cases}$$

である．簡単に解けて解は $x = a - b$, $y = a - c$, $z = -a + b + c$ である．これに $a = 1, b = c = 0$ とおくことにより $\boldsymbol{x}_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)$．さらに $b = 1, a = c = 0$ とおくことにより $\boldsymbol{x}_2 = \left(\begin{smallmatrix}-1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$．$c = 1, a = b = 0$ とおくことにより $\boldsymbol{x}_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\1\end{smallmatrix}\right)$．よって逆行列は,

$$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(2) 通常次のようにして行列式の値を求める．

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{1 列で展開する．}$$

$$=2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{3 行で展開する．}$$

$$=2\cdot 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=4\cdot(4-3)=4$$

以上より $\boxed{\mathbf{18}}$ の答えは ④ である．

補足

2 次と 3 次の行列式の値は，サラスの方法と呼ばれるたすき掛け計算に似た計算法を使って行列式の形から直ちに求められる．

高次の行列式の値の計算は，行列式の定義に基づいてそのまま計算しようとすると一般に計算が多くて間違いやすくなる．そこで，行列式の値を変えないいくつかの行列式の変形規則を適用して値の求めやすい形に行列式を変形して計算する．簡単に値が求められる典型的な行列式は上三角（または下三角）行列式である．

n 次の上三角行列式の値は対角成分の積である．すなわち，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,\cdots\,a_{nn}$$

問題で与えられた行列式を上三角になるように変形していく．

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \end{vmatrix}$$

第 1 列の $(1,1)$ の対角成分より下の成分は既に 0 であるから，第 2 列の $(2,2)$ の対角成分より下の成分が 0 になるように変形する．
そのため，第 3 行から第 2 行を引き，第 4 行から第 2 行の 2 倍を引く．

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

引き続き，第 3 列の $(3,3)$ の対角成分より下の成分が 0 になるように変形する．
そのため，第 4 行から第 3 行の 4 倍を引く．

$$= 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4$$

上三角になったので，対角成分の積を計算する．

よって求める行列式の値は 4 である．

問 2 (1) 次のベクトルの組が 1 次従属になるのは，$s =$ $\boxed{\textbf{19}}$ のときである．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

(2) 次のベクトルの組が 1 次独立になるのは，$t \neq$ $\boxed{\textbf{20}}$ のときである．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ t \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{19}}$ ・ $\boxed{\textbf{20}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -3　⑨ -4　ⓐ -5

解説

(1) $\mathbb{R}^3$ の 3 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次従属であるための必要十分条件は

$$(*) \qquad c_1\ \boldsymbol{a}_1 + c_2\ \boldsymbol{a}_2 + c_3\ \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$$

が少なくとも一つは 0 ではない c_1, c_2, c_3 について成り立つことである．すなわち同次連立方程式

$$(**) \qquad (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

が自明でない解をもつことである．したがって，係数行列の行列式が

$$|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & s \end{vmatrix} = -3s = 0$$

を満たす．ゆえに $s = 0$ となる．

(2) $\mathbb{R}^3$ の 3 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が 1 次独立であるための必要十分条件は $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ のときにのみ $(*)$ が成り立つことである．すなわち同次連立方程式 $(**)$ が自明な解のみをもつことである．したがって, 係数行列の行列式が

$$|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} = 4t + 4 \neq 0$$

を満たす．ゆえに $t \neq -1$ となる．

以上より $\boxed{\textbf{19}}$ の答えは ⓪, $\boxed{\textbf{20}}$ の答えは ⑥ である．

問 3　4 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の 4 個のベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (k \text{ は定数})$$

と，$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を並べてできる行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

について考える．

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が張る $\mathbb{R}^4$ の部分空間を M とする．M の次元は行列 A の階数（ランク）と等しく $\boxed{\mathbf{21}}$ である．

(2) $\boldsymbol{b}$ が部分空間 M に属するのは $k = \boxed{\mathbf{22}}$ のときである．

(3) $k = \boxed{\mathbf{22}}$ のとき，連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

は解をもち，その解 $\boldsymbol{x}$ はすべて

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{23}} \\ \boxed{\mathbf{24}} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{25}} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ は任意定数})$$

と表すことができる．

$\boxed{\mathbf{21}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{25}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

解説

(1) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の張る部分空間の次元とは, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 3 本から取り出せる 1 次独立なベクトル系の最大本数のことであり, 行列 A の階数 (ランク) に等しい. そこで A に

基本変形を施して, 階段行列まで変形すると, 次のようになる.

1	1	1	
-1	-2	1	2 行 $+$ 1 行
2	1	4	3 行 $-2\times$ 1 行
1	2	-1	4 行 $-$ 1 行
1	1	1	
0	-1	2	
0	-1	2	3 行 $-$ 2 行
0	1	-2	4 行 $+$ 2 行
1	1	1	
0	-1	2	
0	0	0	
0	0	0	

したがって階数は 2 であり, $\boxed{\textbf{21}}$ の答えは ②

参考

明らかに $\boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1$ のスカラー倍でないから $\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_1$ は１次独立である．次に，$\boldsymbol{a}_3$ が $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ と１次独立または１次従属かどうか検討する．そのためには１次従属関係 $\boldsymbol{a}_3 = \alpha\,\boldsymbol{a}_1 + \beta\,\boldsymbol{a}_2$ を成り立たせる定数 α, β があるかどうか調べればよい．この関係は，１次方程式

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 1 = -\alpha - 2\beta \\ 4 = 2\alpha + \beta \\ -1 = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

になる．第１式と第２式から $\alpha = 3, \beta = -2$ という解が見つかる．これは第３式と第４式を満たす．よって $\boldsymbol{a}_3$ は $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ に１次従属し，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ で張られるベクトル空間 M は，実質的に $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ で張られる 2 次元実ベクトル空間であることがわかる．

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を並べて得られる行列 A のランクは，１次独立となる列ベクトルの最大個数と等しいから M の次元と等しく 2 である．

(2) 部分空間 M に $\boldsymbol{b}$ が属する条件は，行列 A にベクトル $\boldsymbol{b}$ を追加して出来る 4 次の

正方行列の階数が A の階数 2 と等しいことである．そこで以下のような計算を行う．

1	1	1	1	
-1	-2	1	k	2 行 $+$ 1 行
2	1	4	-1	3 行 $-2\times$ 1 行
1	2	-1	4	4 行 $-$ 1 行
1	1	1	1	
0	-1	2	$k+1$	
0	-1	2	-3	
0	1	-2	3	4 行 $+$ 3 行
1	1	1	1	
0	-1	2	$k+1$	
0	-1	2	-3	3 行 $-$ 2 行
0	0	0	0	
1	1	1	1	
0	-1	2	$k+1$	
0	0	0	$-k-4$	
0	0	0	0	

したがって, 階数が 2 となる為の条件は $-k-4=0$ つまり $k=-4$ であり, $\boxed{\mathbf{22}}$ の答えは ⓐ である．

参考

部分空間 M に $\boldsymbol{b}$ が属する条件は, M が $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ で張られるから $\boldsymbol{b}=\gamma\,\boldsymbol{a}_1+\delta\,\boldsymbol{a}_2$ となる定数 γ, δ が存在することである．これから γ と δ に関する 1 次方程式

$$\left\{\begin{aligned} 1 &= \gamma+\delta \\ k &= -\gamma-2\delta \\ -1 &= 2\gamma+\delta \\ 4 &= \gamma+2\delta \end{aligned}\right.$$

が導かれる．第 3 式と第 4 式から $\gamma=-2$, $\delta=3$ を得る．この値は第 1 式を満たす．さらに第 2 式を満たすには $k=-4$ でなければならない．

(3) 掃き出し法を使えば連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

の解 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ を求めることができる．既に (2) で計算を行ったので，それを利用すれば $k = -4$ であるから

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 + 2x_3 = k + 1 = -3 \end{cases}$$

を解けば良い．$x_3 = t$ とおけば $x_2 = 2x_3 + 3 = 2t + 3$, $x_1 = -x_2 - x_3 + 1 = -3t - 2$ であるから

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3t-2 \\ 2t+3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t\ \text{は任意定数})$$

以上より $\boxed{\textbf{23}}$, $\boxed{\textbf{24}}$, $\boxed{\textbf{25}}$ の答えは順に⑧, ③, ⑨ である．

参考

(1) で求めた 1 次関係 $\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{a}_1 - 2\boldsymbol{a}_2$ は $-3\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ と書き変えられる．$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ であるから，これは

$$A \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

を意味する．

次に，(2) で求めた 1 次関係 $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$ は

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}$$

を意味する．

さて，上で求めた解をそれぞれ $\boldsymbol{p} = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\boldsymbol{q} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ とおく．したがって $A\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$, $A\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}$ である．いま $\boldsymbol{x}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解とする．このとき，$A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{0}$ である．A のランクは 2 であるから $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q}$ は $\boldsymbol{p}$ の定数倍であり，適当な定数 t をとり $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{q} = t\boldsymbol{p}$ と表される．よって，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + t\boldsymbol{p}$. こうして，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の任意の解 $\boldsymbol{x}$ は，適当な定数 t を用いて

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されることになる．

問 4　行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & -1 \\ c & 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値が $1, 2, 3$ であるとする．

(1)　このとき $a = \boxed{\textbf{26}}$, $b = \boxed{\textbf{27}}$, $c = \boxed{\textbf{28}}$ である．

(2)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{29}} \\ \boxed{\textbf{30}} \\ 2 \end{pmatrix}$ は固有値 2 に対応する固有ベクトルである．この $\boldsymbol{x}$ に対して

$$(A^2 - 3A)\,\boldsymbol{x} = \boxed{\textbf{31}}\,\boldsymbol{x}$$

になる．

$\boxed{\textbf{26}}$ 〜 $\boxed{\textbf{31}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8

⑨ -1　ⓐ -2　ⓑ -3　ⓒ -4　ⓓ -5　ⓔ -6　ⓕ -7　ⓖ -8

解説

(1)　n 次元正方行列 A において

$$(*) \qquad A\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$$

を満たす λ を A の固有値, $\boldsymbol{x}$ を λ に対応する固有ベクトルという．固有値と固有ベクトルを求めるためには $(*)$ を書き換えた

$$(**) \qquad (\lambda E - A)\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

を満たす λ と $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ を求めればよい．$(**)$ で表される同次連立方程式が自明でない解をもつことから

$$|\lambda E - A| = 0$$

を満たす λ が A の固有値である．

この問題では

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & -1 \\ c & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

であるので

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -b & \lambda - 1 & 1 \\ -c & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - a)(\lambda - 1)(\lambda - 3) + c - 2b + 2(\lambda - a) - b(\lambda - 3) - c(\lambda - 1) \\ &= \lambda^3 - (4 + a)\lambda^2 + (5 + 4a - b - c)\lambda - 5a + b + 2c \end{aligned}$$

である．一方 A の固有値が $1, 2, 3$ であることがわかっているので

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

にならなければならない．したがって

$$\begin{cases} 4 + a & = \ 6 \\ 5 + 4a - b - c & = \ 11 \\ -5a + b + 2c & = \ -6 \end{cases}$$

これらを解いて　$a = 2,\ b = 0,\ c = 2$ を得る．したがって，$\boxed{\textbf{26}}$，$\boxed{\textbf{27}}$，$\boxed{\textbf{28}}$ の答えは順に②，⓪，② である．

別解

$|\lambda E - A| = 0$ に $\lambda = 1,\ 2,\ 3$ を代入して得られる 3 式より a, b, c を求めることもできる．

(2)　$A\,\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}$ で $\lambda = 2$ だから

$$A\,\boldsymbol{x} = 2\,\boldsymbol{x}$$

となる $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ を求めればよい．つまり

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とおくと

$$(2E-A)\,\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

これを解いて

$$\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{x}$ の第 3 成分は 2 であるから, $k=1$ となるので

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}.$$

したがって, $\boxed{\mathbf{29}}$, $\boxed{\mathbf{30}}$ の答えは, それぞれ ①, ⓐ である.

次に $A\,\boldsymbol{x}=2\,\boldsymbol{x}$ を用いると

$$(A^2-3A)\,\boldsymbol{x}=A^2\,\boldsymbol{x}-3A\,\boldsymbol{x}=A(A\,\boldsymbol{x})-3A\,\boldsymbol{x}=A(2\,\boldsymbol{x})-3(2\,\boldsymbol{x})=4\,\boldsymbol{x}-6\,\boldsymbol{x}=-2\,\boldsymbol{x}$$

が得られる. したがって, $\boxed{\mathbf{31}}$ の答えは, ⓐ である.

第3分野　常微分方程式

〔 問 1 ～ 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{32}}$ ～ $\boxed{\mathbf{46}}$ 〕

(注意) 問 1～問 4 における y は x の関数であり, y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

問 1 (1) 微分方程式

$$y' + y\cos x = 0$$

の一般解は $\boxed{\mathbf{32}}$ である.

(2) 微分方程式

$$(*) \qquad y' = 1 + \frac{y}{x}$$

を考える. このとき

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

とおくと $u(x)$ に関する微分方程式

$$u' = \boxed{\mathbf{33}}$$

が得られる. この微分方程式の一般解を求めると

$$u(x) = \boxed{\mathbf{34}}$$

である. したがって, $(*)$ の一般解は $y(x) = x\,\boxed{\mathbf{34}}$ となる.

$\boxed{\mathbf{32}}$ **の解答群**

⓪ $e^{\sin x} + C$　① $e^{\cos x} + C$　② $e^{-\sin x} + C$

③ $e^{-\cos x} + C$　④ $Ce^{\sin x}$　⑤ $Ce^{\cos x}$

⑥ $Ce^{-\sin x}$　⑦ $Ce^{-\cos x}$　(C は任意定数)

$\boxed{\mathbf{33}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{x}$　① $\dfrac{1}{x}+\dfrac{u}{x}$　② $u+\dfrac{u}{x}$　③ $\dfrac{u}{x}$

④ x　⑤ xu　⑥ u　⑦ $1+u$

$\boxed{\mathbf{34}}$ **の解答群**

⓪ $\log|x|+C$　① $Cx-1$　② Cxe^x　③ Cx

④ $\dfrac{x^2}{2}+C$　⑤ $Ce^{x^2/2}$　⑥ Ce^x　⑦ Ce^x-1

(C は任意定数)

解説

(1) 与えられた微分方程式 $y'+y\cos x=0$ は変数分離形である．そこで,

$$\frac{y'}{y}=-\cos x$$

と書き直して両辺を積分すると,

$$\log|y|=-\sin x+C_0 \qquad (C_0\text{は任意定数})$$

が得られる．上式を変形すると,

$$y=\pm e^{-\sin x+C_o}$$

となる．ここで，$\pm e^{C_o}=C$ とおくと,

$$y=Ce^{-\sin x}$$

となる．したがって，$\boxed{\mathbf{32}}$ の答えは ⑥ である．

(2) $u(x)=\frac{y(x)}{x}$ を変形すると,

$$y(x)=xu(x)$$

となる．これを微分すると,

$$y'=u+xu'$$

となる．これに $(*)$ を代入すると，

$$1+\frac{y}{x}=\frac{y}{x}+xu'$$

となり，これを変形すると，

$$u'=\frac{1}{x}$$

となる．したがって， $\boxed{\textbf{33}}$ の答えは ⓪ である．また，上式を積分すると，

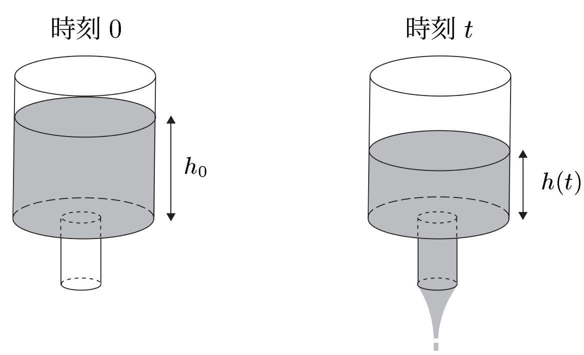
$$u(x)=\log|x|+C \qquad (C\text{ は任意定数})$$

となる．したがって， $\boxed{\textbf{34}}$ の答えは ⓪ である．

問 2　下の左図のように，円筒容器に液体が底面から高さ h_0 $(h_0>0)$ まで満たされている．時刻 $t=0$ で底面の排出口を開き液体を外へ流し出す．容器内の液面の高さ $h(t)$ は微分方程式

$$(*) \qquad \frac{dh}{dt}=-K\sqrt{h}$$

に従い減少していくものとする．ここで，K は正の定数である．以下では，$0<h(t)\leqq h_0$ が成り立つ時間範囲内で $h(t)$ を考える．



(1)　初期条件 $h(0)=h_0$ のもとでの微分方程式 $(*)$ の解 $h(t)$ が，$0<h(t)\leqq h_0$ を満たす時間範囲は $0\leqq t<$ $\boxed{\textbf{35}}$ である．

$\boxed{35}$ の解答群

⓪ $\dfrac{{h_0}^2}{K}$　① $\dfrac{2{h_0}^2}{K}$　② $\dfrac{h_0}{K}$　③ $\dfrac{2h_0}{K}$　④ $\dfrac{\sqrt{h_0}}{K}$

⑤ $\dfrac{2\sqrt{h_0}}{K}$　⑥ $\dfrac{h_0}{K^2}$　⑦ $\dfrac{2h_0}{K^2}$

(2) $h_0 = 100,\ \ K = 0.02$ のとき, $h(T) = 16$ となる時刻 T は $\boxed{\textbf{36}}$ である．求めた T は, $0 < T <$ $\boxed{\textbf{35}}$ であることが確かめられる．

$\boxed{\textbf{36}}$ の解答群

⓪ 200　① 400　② 600　③ 1000　④ 1400　⑤ 3000

⑥ 4000　⑦ 10000　⑧ 20000　⑨ 80000　ⓐ 100000

解説

(1) 微分方程式 $\dfrac{dh}{dt} = -K\sqrt{h}$ は変数分離形である． $\dfrac{dh}{\sqrt{h}} = -K\,dt$ と変数分離し, 両辺をそれぞれの変数について積分すれば,

$$2\sqrt{h} = -K\,t + C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

を得る．ここで $t = 0$ とおいて初期条件を代入すれば,

$$2\sqrt{h} = -K\,t + 2\sqrt{h_0}. \qquad \cdots\cdots\ (\star)$$

したがって微分方程式の解は

$$h(t) = \frac{1}{4}\left(-K\,t + 2\sqrt{h_0}\right)^2 \qquad \cdots\cdots\ (\star\star)$$

さて, $h(t) > 0$ が成り立つ時間は, $(\star)$ より $-K\,t + 2\sqrt{h_0} > 0$ とならなければならないから,

$$t < \frac{2\sqrt{h_0}}{K}$$

したがって $\boxed{\textbf{35}}$ の答えは ⑤ である．

(2) 上で求めた解 $(\star\star)$ において $h_0 = 100,\ \ K = 0.02$ を代入すると

$$h(t) = \frac{1}{4}\left(-0.02\,t + 20\right)^2$$

となる．条件 $h(T) = 16$ から T に関する 2 次方程式 $\dfrac{1}{4}\left(-0.02\,T + 20\right)^2 = 16$ を得る．2 つの解 $T = 600,\ 1400$ のうち $\dfrac{2\sqrt{h_0}}{K} = 1000$ より小さい解は $T = 600$ である．これが求める時刻になる．したがって $\boxed{\textbf{36}}$ の答えは ② である．

注意

方程式 $\dfrac{dh}{dt} = -K\sqrt{h}$ は $h = 0$ で解の一意性が成り立たない．物理的現象に適合する解は上で求めた $(\star\star)$ でなく，

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\left(-K\,t + 2\sqrt{h_0}\,\right)^2 & \left(t < \dfrac{2\sqrt{h_0}}{K} \text{ のとき}\right) \\ 0 & \left(t \geqq \dfrac{2\sqrt{h_0}}{K} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

である．この関数は連続微分可能で微分方程式を満たすことが確かめられる．

問 3　正の定数 k を含んだ次の微分方程式

$$(*) \qquad y'' + 2k\,y' + y = 0$$

を考える．

(1)　方程式 $(*)$ の一般解は

$k = \dfrac{4}{5}$ のとき $\boxed{\mathbf{37}}$,

$k = 1$ のとき $\boxed{\mathbf{38}}$,

$k = \dfrac{5}{4}$ のとき $\boxed{\mathbf{39}}$

である．

$\boxed{\mathbf{37}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{39}}$ **の解答群**

⓪ $e^{3x/5}\left(C_1\cos\dfrac{4x}{5}+C_2\sin\dfrac{4x}{5}\right)$　① $e^{4x/5}\left(C_1\cos\dfrac{3x}{5}+C_2\sin\dfrac{3x}{5}\right)$

② $e^{-3x/5}\left(C_1\cos\dfrac{4x}{5}+C_2\sin\dfrac{4x}{5}\right)$　③ $e^{-4x/5}\left(C_1\cos\dfrac{3x}{5}+C_2\sin\dfrac{3x}{5}\right)$

④ $e^{x}\left(C_1+C_2x\right)$　⑤ $e^{-x}\left(C_1+C_2x\right)$

⑥ $e^{5x/4}\left(C_1\cos\dfrac{3x}{4}+C_2\sin\dfrac{3x}{4}\right)$　⑦ $e^{-5x/4}\left(C_1\cos\dfrac{3x}{4}+C_2\sin\dfrac{3x}{4}\right)$

⑧ $C_1e^{x/2}+C_2e^{2x}$　⑨ $C_1e^{-x/2}+C_2e^{-2x}$

ⓐ $C_1e^{x/2}+C_2e^{-2x}$　ⓑ $C_1e^{-x/2}+C_2e^{2x}$

(C_1, C_2 は任意定数)

(2)　初期条件 $y(0)=a$, $y'(0)=b$ を満たす $(*)$ の解を $y_0(x)$ とおく．このとき $\lim_{x\to\infty}y_0(x)=0$ が成り立つかどうかを考える．これに関して正しい命題は $\boxed{\mathbf{40}}$ である．

$\boxed{\mathbf{40}}$ **の解答群**

⓪　初期値 a, b の値によって，$\lim_{x\to\infty}y_0(x)=0$ が成り立ったり，成り立たなかったりする．

①　初期値 a, b の値によらず $\lim_{x\to\infty}y_0(x)=0$ が常に成り立つ．

解説

(1)　微分方程式 $y''+2ky'+y=0$ の特性方程式は

$$\lambda^2+2k\lambda+1=0$$

である．$k>0$ に注意すればこの 2 次方程式の根は

$$\lambda=\begin{cases}-k\pm\sqrt{1-k^2}\,i & (0<k<1)\\ -1\ \ (\text{重根}) & (k=1)\\ -k\pm\sqrt{k^2-1} & (k>1)\end{cases}$$

と分かれる．それぞれの場合に応じて微分方程式の一般解は次のようになる．

- ◦ $0 < k < 1$ のとき，$e^{-kx}\cos(\sqrt{1-k^2}\,x)$ と $e^{-kx}\sin(\sqrt{1-k^2}\,x)$ との 1 次結合
- ◦ $k = 1$ のとき，e^{-x} と xe^{-x} との 1 次結合
- ◦ $k > 1$ のとき，$e^{(-k+\sqrt{k^2-1}\,)x}$ と $e^{(-k-\sqrt{k^2-1}\,)x}$ との 1 次結合

以上のことから

- ◦ $k = \frac{4}{5}$ のとき，一般解は $y = e^{-4x/5}\left(C_1\cos\frac{3x}{5} + C_2\sin\frac{3x}{5}\right)$.
- ◦ $k = 1$ のとき，一般解は $y = e^{-x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.
- ◦ $k = \frac{5}{4}$ のとき，一般解は $y = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{-2x}$.

ただし，C_1, C_2 は任意定数である．したがって $\boxed{\mathbf{37}}$, $\boxed{\mathbf{38}}$, $\boxed{\mathbf{39}}$ の答えは, 順に ③, ⑤, ⑨ である．

(2) $x \to \infty$ ときの極限をそれぞれの場合について考える．

- ◦ $0 < k < 1$ のとき，

$$|e^{-kx}\cos(\sqrt{1-k^2}\,x)| \leqq e^{-kx} \;\to\; 0$$

  同様に，$e^{-kx}\sin(\sqrt{1-k^2}\,x) \;\to\; 0$ である．

- ◦ $k = 1$ のとき，x の任意の多項式 $p(x)$ に関して $\lim_{x\to\infty} p(x)e^{-x} = 0$ であるから，特に，$xe^{-x} \;\to\; 0$ である．
- ◦ $k > 1$ のとき，$-k + \sqrt{k^2-1} = \dfrac{-1}{k+\sqrt{k^2-1}} < 0$, $\;-k - \sqrt{k^2-1} < 0$ であるから，

$$e^{(-k+\sqrt{k^2-1}\,)x} \;\to\; 0, \qquad e^{(-k-\sqrt{k^2-1}\,)x} \;\to\; 0$$

  となる．

以上から $k > 0$ のとき，$x = 0$ における初期値の値によらず微分方程式の解は $x \to \infty$ のとき 0 に収束する．したがって $\boxed{\mathbf{40}}$ の答えは ① である．

問 4　微分方程式

$$(*) \qquad y'' - 2y' - 3y = 5\sin x$$

の解で初期条件

$$(**) \qquad y(0) = \frac{1}{4}, \quad y'(0) = \frac{1}{4}$$

を満たす $y(x)$ を求める.

(1)　$(*)$ の特殊解 (特解) を

$$y_0(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

とおくと，$C_1 = \boxed{\mathbf{41}}$, $C_2 = \boxed{\mathbf{42}}$ である.

$\boxed{41}$ ・ $\boxed{42}$ の解答群

⓪ 0

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 3

⑥ $-\frac{1}{4}$　⑦ $-\frac{1}{2}$　⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3

(2)　$(*)$ に対応する同次方程式 (補助方程式)

$$y'' - 2y' - 3y = 0$$

の一般解は

$$A_1 e^{-x} + A_2 e^{3x} \qquad (A_1,\ A_2 \text{ は任意定数})$$

であるから $(*)$ の一般解は $\boxed{\mathbf{43}}$ である.

$\boxed{43}$ の解答群

⓪ $A_1 e^{-x} + A_2 e^{3x} + y_0(x)$　① $A_1 e^{-x} + A_2 e^{3x} - y_0(x)$

② $\left(A_1 e^{-x} + A_2 e^{3x}\right) y_0(x)$

(3)　(2) で求めた $\boxed{43}$ が初期条件 $(**)$ を満たすのは

$$A_1 = \boxed{44}, \quad A_2 = \boxed{45}$$

のときである．これによって求める解 $y(x)$ が得られる．さらに

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \boxed{46}$$

が成り立つ．

$\boxed{44}$ 〜 $\boxed{46}$ の解答群

⓪ 0

① $\dfrac{1}{4}$	② $\dfrac{1}{2}$	③ 1	④ 2	⑤ 3	⑥ ∞
⑦ $-\dfrac{1}{4}$	⑧ $-\dfrac{1}{2}$	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3	ⓒ $-\infty$

解説

(1)　$y_0(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ を $(*)$ の左辺に代入すると，

$$\begin{aligned}
& y'' - 2y' - 3y \\
&= (C_1 \sin x + C_2 \cos x)'' - 2(C_1 \sin x + C_2 \cos x)' - 3(C_1 \sin x + C_2 \cos x) \\
&= (-C_1 \sin x - C_2 \cos x) - 2(C_1 \cos x - C_2 \sin x) - 3(C_1 \sin x + C_2 \cos x) \\
&= (-4C_1 + 2C_2) \sin x - (2C_1 + 4C_2) \cos x
\end{aligned}$$

であり，これが $(*)$ の右辺 $(5 \sin x)$ に一致すればよい．$\sin x, \cos x$ の係数を比較すると，

$$-4C_1 + 2C_2 = 5, \qquad 2C_1 + 4C_2 = 0$$

を得る．これを C_1 と C_2 について解くと，$C_1 = -1$，$C_2 = \frac{1}{2}$ と定まる．したがって，$\boxed{41}$ の答えは ⑧，$\boxed{42}$ の答えは ② である．

(2)　$(*)$ の一般解 $y(x)$ は，（同次方程式の一般解）＋（非同次方程式の特殊解）として求められるので，$y(x) = A_1 e^{-x} + A_2 e^{3x} + y_0(x)$ となる．したがって，$\boxed{43}$ の答えは ⓪ である．

(3)　(2) で得られた $y(x)$ を微分すると，

$$y'(x) = -A_1 e^{-x} + 3A_2 e^{3x} - \cos x - \frac{\sin x}{2}$$

となり，初期条件 $(**)$ より

$$y(0) = A_1 + A_2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \qquad y'(0) = -A_1 + 3A_2 - 1 = \frac{1}{4}$$

が得られる．これらの式から $A_1 = -\frac{1}{2}$，$A_2 = \frac{1}{4}$ が得られる．したがって，$\boxed{\mathbf{44}}$ の答えは ⑧，$\boxed{\mathbf{45}}$ の答えは ① である．(1)〜(3) の結果より，$y(x)$ は,

$$y(x) = -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{3x}}{4} - \sin x + \frac{\cos x}{2}$$

となる．そこで，$x \to \infty$ の極限をとると，右辺第 1 項は 0，第 2 項は ∞，第 3 項は $|\sin x| \leq 1$，第 4 項は $|\cos x| \leq 1$ となるため,

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \infty$$

となる．したがって，$\boxed{\mathbf{46}}$ の答えは ⑥ である．

第4分野　確率・統計

〔問1 〜 問5 ： 解答番号 $\boxed{47}$ 〜 $\boxed{65}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$, $D(X)$ はそれぞれ X の期待値 (平均，平均値)，分散，標準偏差を表す．

問1 (1) 確率変数 X の確率分布が次で与えられている．

X の値	1	3	5	7	9
確率	a	$\frac{1}{4}$	b	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

(a, b は定数)

期待値が $E(X) = 5$ のとき，$a = \boxed{47}$, $b = \boxed{48}$ である．

$\boxed{47}$ ・ $\boxed{48}$ の解答群

⓪ 0　① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{8}$　④ $\frac{1}{16}$

(2) 確率変数 X の期待値が $E(X) = 1$，標準偏差が $D(X) = \sqrt{2}$ であるとき，$E(X^2) = \boxed{49}$ である．

$\boxed{49}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4

解説

(1) 期待値の定義から，

$$5 = E(X) = 1 \cdot a + 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot b + 7 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{8}.$$

また，確率の総和（全事象の確率）は 1 であることから，

$$a + \frac{1}{4} + b + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1.$$

以上より，

$$\begin{cases} a + \dfrac{3}{4} + 5b + \dfrac{7}{4} + \dfrac{9}{8} = 5 \\ a + \dfrac{1}{4} + b + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} = 1 \end{cases}$$

を得る．すなわち，

$$\begin{cases} a + 5b = \dfrac{11}{8} \\ a + b = \dfrac{3}{8}. \end{cases}$$

これを解いて，$a = \dfrac{1}{8}$, $b = \dfrac{1}{4}$ を得る．したがって，$\boxed{\mathbf{47}}$ の答えは③ であり，$\boxed{\mathbf{48}}$ の答えは② である．

注意

$$P(X = 3) = P(X = 7), \quad |3 - 5| = |7 - 5|$$

であること，さらに $|1 - 5| = |9 - 5|$ と $E(X) = 5$ に注意すると，X の確率分布は 5 について対称になっていることに気づく．これからただちに，

$$a = P(X = 1) = P(X = 9) = \frac{1}{8}$$

を得ることもできる．

(2) 標準偏差 $D(X)$ は分散 $V(X)$ の平方根, つまり $D(X) = \sqrt{V(X)}$ であることと，公式

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

を用いて

$$2 = E(X^2) - 1$$

を得る．これから，$E(X^2) = 3$．したがって，$\boxed{\mathbf{49}}$ の答えは③．

問 2 2 つの事象 A, B の確率が

$$P(A)=\frac{1}{3},\qquad P(B)=\frac{1}{4}$$

であるとする．

(1) $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$ のとき，A と B は $\boxed{\mathbf{50}}$．また，$P(A\cup B)=\boxed{\mathbf{51}}$ となる．

(2) 事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率を $P(A|B)$ で表す．

いま $P(A|B)=\dfrac{1}{3}$ のとき，A と B は $\boxed{\mathbf{52}}$．このとき

$$P(B|A)=\boxed{\mathbf{53}}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{50}}$ ・ $\boxed{\mathbf{52}}$ の解答群

⓪ 独立である　① 従属である（独立ではない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

$\boxed{\mathbf{51}}$ ・ $\boxed{\mathbf{53}}$ の解答群

⓪ 0	① $\frac{1}{12}$	② $\frac{1}{6}$	③ $\frac{1}{4}$	④ $\frac{1}{3}$	⑤ $\frac{5}{12}$
⑥ $\frac{7}{12}$	⑦ $\frac{2}{3}$	⑧ $\frac{3}{4}$	⑨ $\frac{5}{6}$	ⓐ $\frac{11}{12}$	ⓑ 1

解説

(1) 事象 A, B が独立であるとは

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

が成り立つことである．$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ のときは

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}\neq\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=P(A)P(B)$$

であるから独立ではない．また

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$$

である．したがって，$\boxed{\mathbf{50}}$ の答えは ①，$\boxed{\mathbf{51}}$ の答えは ⑤ である．

(2) 事象 B が起こったときの事象 A の起こる条件付き確率の定義は

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

であるから,

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

したがって，この場合は

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{12}$$

が成り立つので，A と B は独立である．また,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

である．以上から，$\boxed{\mathbf{52}}$ の答えは ⓪ であり，$\boxed{\mathbf{53}}$ の答えは ③ である．

注意

$P(B) \neq 0$ であるとき,

$$\text{事象 } A \text{ と事象 } B \text{ が独立} \iff P(A) = P(A|B)$$

であることを用いれば，A と B は独立であることはすぐにわかる．また，同様に，$P(A) \neq 0$ であるとき,

$$\text{事象 } A \text{ と事象 } B \text{ が独立} \iff P(B) = P(B|A)$$

であることを用いれば，$P(B|A) = P(B) = \dfrac{1}{4}$ はただちに得られる．

問 3 20 分ごとに電車が発車する駅に，あらかじめ時刻表など調べずにA君がやってきた．A君が駅に着いてから，はじめて電車が発車するまでの時間を X 分とおく．ただし電車の発車時刻ちょうどにA君が駅に着いた場合は $X = 0$ とする．すなわち X のとる値の範囲は $0 \leqq X < 20$ である．また，任意の区間 $[a, b]$ $(0 \leqq a < b < 20)$ について

$$P(a \leqq X \leqq b) = \frac{b-a}{20}$$

とする．したがって，X の確率密度関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \begin{cases} \boxed{\mathbf{54}} & (0 \leqq x < 20) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

であり, 平均 $E(X) = \boxed{\mathbf{55}}$, 分散 $V(X) = \boxed{\mathbf{56}}$ である．

$\boxed{54}$ 〜 $\boxed{56}$ の解答群

⓪ 0	① $\frac{1}{50}$	② $\frac{1}{40}$	③ $\frac{1}{20}$	④ $\frac{1}{10}$	⑤ $\frac{1}{5}$
⑥ $\frac{1}{4}$	⑦ $\frac{1}{3}$	⑧ 1	⑨ 5	ⓐ 10	ⓑ 15
ⓒ 20	ⓓ 25	ⓔ 30	ⓕ $\frac{25}{3}$	ⓖ $\frac{50}{3}$	ⓗ $\frac{100}{3}$

解説

確率変数 X について x の関数 $P(X \leqq x)$ を X の分布関数と言う．分布関数は x について単調増加であり, $\lim_{x\to\infty} P(X \leqq x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} P(X \leqq x) = 0$ が成り立つ．また分布関数を x で微分すると X の確率密度関数が得られる．この問題の場合は $0 < x < 20$ の時に $P(X \leqq x) = P(0 \leqq X \leqq x) = \frac{x}{20}$ であるから,

$$f(x) = \frac{d}{dx}P(X \leqq x) = \frac{1}{20}$$

となる．また $x \leqq 0$ のときは $P(X \leqq x) = 0$ であり $x \geq 20$ のときは $P(X \leqq x) = 1$ が成り立つことより, $x < 0$ または $x > 20$ のとき $f(x) = 0$ である．($x = 0$, $x = 20$ において分布関数は微分可能ではないが, 以下問題となるのは $f(x)$ に関する積分であるから無視できる.) したがって,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20} & (0 \leqq x < 20) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

として良い．

さて確率密度関数 $f(x)$ を持つ確率変数 X について X 自身や X^2 の期待値 (平均) は

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx\,, \qquad E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

であるから, この問題の場合は

$$E(X) = \int_0^{20} x\frac{1}{20}\,dx = \frac{1}{20}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{20} = 10$$

となり

$$E(X^2) = \int_0^{20} x^2\frac{1}{20}\,dx = \frac{1}{20}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{20} = \frac{20^2}{3}$$

である．したがって, 分散 $V(X)$ は

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{20^2}{3} - 10^2 = \frac{100}{3}$$

と計算される．以上より $\boxed{54}$ の答えは ③, $\boxed{55}$ の答えは ⓐ, $\boxed{56}$ の答えは ⓗ である．

問 4 確率変数 X の分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とし，確率密度関数を $f(x)$ とする．また，$\lambda > 0$ を定数とし，

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

が成り立っているとする．このとき，$x > 0$ に対して $f(x) = \boxed{\textbf{57}}$ である．また，$Y = 2X + 1$ の確率密度関数 $g(y)$ は，$y > 1$ に対して $g(y) = \boxed{\textbf{58}}$ である．

$\boxed{57}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $e^{-\lambda x}$　③ $\lambda e^{-\lambda x}$　④ $\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$

$\boxed{58}$ の解答群

⓪ 0　① 1

② $2\lambda e^{-\lambda(2y+1)}$　③ $2\lambda e^{-\lambda(2y-1)}$　④ $2\lambda e^{-\frac{\lambda(y-1)}{2}}$　⑤ $\lambda e^{-\frac{\lambda(y-1)}{2}}$

⑥ $\dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda(2y+1)}$　⑦ $\dfrac{\lambda}{2}e^{-\lambda(2y-1)}$　⑧ $\dfrac{\lambda}{2}e^{-\frac{\lambda(y-1)}{2}}$　⑨ $\lambda e^{-\frac{\lambda(y+1)}{2}}$

解説 分布関数の微分が確率密度関数であるから，$x > 0$ について

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

である．また $Y = 2X + 1$ の分布関数を $G(y) = P(Y \leqq y)$ とおけば

$$G(y) = P(Y \leqq y) = P(2X + 1 \leqq y) = P\left(X \leqq \frac{y-1}{2}\right) = F\left(\frac{y-1}{2}\right)$$

が成り立つ．よって $y > 1$ のとき

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{d}{dy}G(y) \\ &= \frac{d}{dy}F\left(\frac{y-1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}F'\left(\frac{y-1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}f\left(\frac{y-1}{2}\right) \\ &= \frac{\lambda}{2}e^{-\frac{\lambda(y-1)}{2}}. \end{aligned}$$

以上より $\boxed{\textbf{57}}$ の答えは ③ であり $\boxed{\textbf{58}}$ の答えは ⑧ である．

問 5　表が出る確率が p である硬貨を 100 回投げたところ，60 回表が出た．この硬貨は表が出やすいかどうかを有意水準 5% で片側検定を行う．

まず帰無仮説 H_0 と対立仮説 H_1 を

$$H_0: \ p = 0.5, \qquad\qquad H_1: \ p > 0.5$$

とおく．表の出る回数を X とおけば，確率変数 X は二項分布 $B(n, p)$ $(n = 100)$ に従うので平均 $E(X) = \boxed{\textbf{59}}$，分散 $V(X) = \boxed{\textbf{60}}$ である．n が十分大きいので X は 平均 $\boxed{\textbf{59}}$，分散 $\boxed{\textbf{60}}$ の正規分布で近似できる．したがって，

$$Z = \frac{X - \boxed{\textbf{59}}}{\sqrt{\boxed{\textbf{60}}}}$$

の分布は平均 0, 分散 1 の標準正規分布とみなしてよい．

帰無仮説 $H_0 : p = 0.5$ のもとで

$$Z = \frac{X - \boxed{\textbf{61}}}{\boxed{\textbf{62}}}$$

である．この場合，X の実現値は 60 であるから Z の実現値は $\boxed{\textbf{63}}$ となる．正規分布表を調べると

$$P(Z \leqq 1.6449) = 0.95$$

であるから, 仮説 H_0 は $\boxed{\textbf{64}}$．したがって，有意水準 5% で表が出やすいと $\boxed{\textbf{65}}$．

$\boxed{\textbf{59}}$ ・ $\boxed{\textbf{60}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② p　③ $\sqrt{n}p$

④ np　⑤ np^2　⑥ $\sqrt{n}p(1-p)$　⑦ $np(1-p)$

⑧ $\sqrt{np(1-p)}$

$\boxed{\textbf{61}}$ ・ $\boxed{\textbf{62}}$ の解答群

⓪ 0　① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{5}{2}$　④ 5　⑤ 25

⑥ 50　⑦ 100

63 **の解答群**

⓪ 0　① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

⑥ 3　⑦ $\frac{7}{2}$

64 **の解答群**

⓪ 棄却される　① 棄却されない

65 **の解答群**

⓪ いえる　① いえない

解説

二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数 X の平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ はそれぞれ $E(X)=np$ と $V(X)=np(1-p)$ である．したがって，$\boxed{\mathbf{59}}$ の答えは ④，$\boxed{\mathbf{60}}$ の答えは ⑦ である．

また n が十分大きいとき X の分布は同じ平均と分散を持つ正規分布で近似できることが知られている．X を平均 0, 分散 1 になるように変形するには

$$Z=\frac{X-E(X)}{\sqrt{V(X)}}=\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

とすれば良い． このとき Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うことになる． 帰無仮説 $H_0: p=0.5$ のもとでは, $n=100$ と合わせて

$$Z=\frac{X-100\cdot 0.5}{\sqrt{100\cdot 0.5(1-0.5)}}=\frac{X-50}{5}$$

となる．したがって，$\boxed{\mathbf{61}}$ の答えは ⑥，$\boxed{\mathbf{62}}$ の答えは ④ である．

表が 60 回出たと言うことは X の実現値が 60 と言うことであるから, Z の実現値は

$$\frac{60-50}{5}=2$$

である．ここで $P(Z \leqq 1.6449)=0.95$ であるから, 有意水準 5% で片側検定を行うとき Z の実現値 2 は, $2>1.6449$ ゆえ棄却域に属する．したがって有意水準 5% で, 帰無仮説は棄却され, 表が出やすいといえる．以上より $\boxed{\mathbf{63}}$ の答えは ④，$\boxed{\mathbf{64}}$ の答えは ⓪，$\boxed{\mathbf{65}}$ の答えは ⓪ である．