EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2010年度 工学系数学統一試験 問題の解説

2010年12月11日（土）

4分野受験 午後1時30分 ～ 午後4時10分

3分野受験 午後1時30分 ～ 午後3時30分

2分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時50分

1分野受験 午後1時30分 ～ 午後2時10分

解答上の注意

(1) 解答として最も相応しいものを指定された解答群から選んでその記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群に相応しいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\mathbf{23}}$ は $(\boxed{\mathbf{23}})$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2-\boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問１～問５ ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{19}}$ 〕

(注意)　$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ はそれぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲 (値域) は，

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1}x \leqq \dfrac{\pi}{2}$,　$0 \leqq \cos^{-1}x \leqq \pi$,　$-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1}x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

問１　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right) = \boxed{\mathbf{1}}$ である．また，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2} = \boxed{\mathbf{2}}$ である．

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ $-\infty$	① -4	② -2	③ -1	④ $-\dfrac{1}{2}$	⑤ 0
⑥ $\dfrac{1}{2}$	⑦ 1	⑧ 2	⑨ 4	ⓐ ∞	

解説　$\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}$ は，$x\to\infty$ のとき $\infty-\infty$ の不定形である．x が十分大きい正の数のとき，

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x} &= \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)\times\frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}\\ &= \frac{(x^2+2x)-(x^2-2x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}\\ &= \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}\\ &= \frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}\end{aligned}$$

となるから，$x\to\infty$ のとき

$$\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x} \to \frac{4}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 2$$

である．したがって，$\boxed{\mathbf{1}}$ は ⑧ である．

次に，$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$ であるから

$$\frac{\cos^2 x-1}{x^2} = \frac{-\sin^2 x}{x^2} = -\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

である．$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ に注意すると，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x^2}=-1$ である．したがって，$\boxed{\mathbf{2}}$ は ③ である．

問 2 関数 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x\ (-1<x<1)$ を考える．

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\boxed{\mathbf{3}},\qquad \frac{d}{dx}\cos^{-1}x=\boxed{\mathbf{4}}$$

より

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x\right)=\boxed{\mathbf{5}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ ・ $\boxed{\mathbf{4}}$ の解答群

⓪ $\sin^{-1}x$	① $-\sin^{-1}x$	② $\cos^{-1}x$	③ $-\cos^{-1}x$
④ $\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$	⑤ $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$	⑥ $-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$	⑦ $-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
⑧ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	⑨ $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	ⓐ $\dfrac{1}{x^2+1}$	ⓑ $-\dfrac{1}{x^2+1}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ の解答群

⓪ 0	① $\cos^{-1}x-\sin^{-1}x$	② $-\cos^{-1}x+\sin^{-1}x$
③ $\dfrac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$	④ $-\dfrac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$	⑤ $\dfrac{2}{x^2+1}$
⑥ $-\dfrac{2}{x^2+1}$	⑦ $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$	⑧ $-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

さらに，$\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\boxed{\mathbf{6}}$，$\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\boxed{\mathbf{7}}$ である．したがって，

$$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\boxed{\mathbf{8}}$$

となる．

$\boxed{6}$ ・ $\boxed{7}$ の解答群

⓪ $\dfrac{\pi}{6}$	① $\dfrac{\pi}{4}$	② $\dfrac{\pi}{3}$	③ $\dfrac{1}{6}$	④ $\dfrac{1}{3}$	⑤ $\dfrac{1}{2}$
⑥ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	⑦ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	⑧ $-\dfrac{\pi}{6}$	⑨ $-\dfrac{\pi}{4}$	ⓐ $-\dfrac{\pi}{3}$	ⓑ $-\dfrac{1}{6}$
ⓒ $-\dfrac{1}{3}$	ⓓ $-\dfrac{1}{2}$	ⓔ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	ⓕ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		

$\boxed{8}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\sqrt{2}$	③ π
④ $\dfrac{\pi}{2}$	⑤ $\dfrac{\pi}{3}$	⑥ $\dfrac{\pi}{4}$	⑦ $\dfrac{\pi}{6}$
⑧ $\dfrac{2}{x^2+1}$	⑨ $-\dfrac{2}{x^2+1}$	ⓐ $\tan^{-1} x$	ⓑ $-\tan^{-1} x$

解説　$\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ は覚えておいた公式から即答してもよいし，次のように逆関数の微分法から求めてもよい．

今 $-1 < x < 1$ の範囲で $y = \sin^{-1} x$ とおくと，x は y の関数 $x = \sin y$ である．$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ と $\cos y \geqq 0$ から $\cos y = \sqrt{1-x^2}$ であることに注意すると，

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

である．したがって $\boxed{3}$ は ⑧ である．

同様に $y = \cos^{-1} x$ とおく．すると $x = \cos y$ である．$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ と $\sin y \geqq 0$ から $\sin y = \sqrt{1-x^2}$ であるので，

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$$

である．したがって $\boxed{4}$ は ⑨ である．

以上から

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x\right) = 0$$

であるから，$\boxed{5}$ は ⓪ である．これより $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ が定数関数であることがわかる．

$\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$, $\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，$\boxed{\mathbf{6}}$ は ⓪，$\boxed{\mathbf{7}}$ は ②である．したがって，定数関数 $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$ は $x=\dfrac{1}{2}$ のときの値 $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ である．よって，$\boxed{\mathbf{8}}$ は ④ である．

問 3 $\displaystyle\int \log(1+x^2)\,dx$ を計算する．部分積分を利用すると

$$\begin{aligned}\int \log(1+x^2)\,dx &= x\log(1+x^2)-\int \boxed{\mathbf{9}}\,dx\\ &= x\log(1+x^2)+\boxed{\mathbf{10}}+C\end{aligned}$$

である．ただし，C は任意定数である．

$\boxed{9}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{2}$	① 1	② 2
③ $2x^2$	④ $\dfrac{x}{1+x^2}$	⑤ $\dfrac{2x}{1+x^2}$
⑥ $\dfrac{x^2}{1+x^2}$	⑦ $\dfrac{2x^2}{1+x^2}$	⑧ $\log(1+x^2)$
⑨ $x\log(1+x^2)$	ⓐ $x^2\log(1+x^2)$	ⓑ $\dfrac{1}{2}x^2\log(1+x^2)$

$\boxed{10}$ の解答群

⓪ $-\dfrac{1}{2}x$	① $-x$	② $-2x$
③ $-\dfrac{2}{3}x^2$	④ $\log(1+x^2)$	⑤ $-\log(1+x^2)$
⑥ $\dfrac{\log(1+x^2)}{2}$	⑦ $-\dfrac{\log(1+x^2)}{2}$	⑧ $\tan^{-1}x$
⑨ $2\tan^{-1}x$	ⓐ $-2x+2\log(x^2+1)$	ⓑ $2x+2\log(x^2+1)$
ⓒ $\tan^{-1}x+x$	ⓓ $\tan^{-1}x-x$	ⓔ $x-\tan^{-1}x$
ⓕ $2\tan^{-1}x+2x$	ⓖ $2\tan^{-1}x-2x$	ⓗ $2x-2\tan^{-1}x$

解説　部分積分を利用すると，

$$\begin{aligned}\int \log(1+x^2)\,dx &= x\log(1+x^2) - \int x\left(\log(1+x^2)\right)'\,dx \\ &= x\log(1+x^2) - \int x\,\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)'\,dx \\ &= x\log(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx\end{aligned}$$

である．したがって $\boxed{\mathbf{9}}$ は ⑦ である．次に，$\dfrac{2x^2}{1+x^2}$ を積分すると，

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{2(1+x^2)-2}{1+x^2}\,dx \\ &= \int \left(2 - \frac{2}{1+x^2}\right)dx \\ &= 2x - 2\tan^{-1}x + (\text{積分定数})\end{aligned}$$

となるから $\boxed{\mathbf{10}}$ は ⓖ である．

問 4　関数 $f(x,y) = \log(x^2+y^2) \quad ((x,y) \neq (0,0))$ を考える．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boxed{\mathbf{11}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \boxed{\mathbf{12}}$$

である．また，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \boxed{\mathbf{13}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boxed{\mathbf{14}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{11}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{14}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{x^2+y^2}$
③ $\dfrac{2}{x^2+y^2}$	④ $\dfrac{2x}{x^2+y^2}$	⑤ $\dfrac{2y}{x^2+y^2}$
⑥ $\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$	⑦ $\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}$	⑧ $\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$
⑨ $-\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$	ⓐ $\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$	ⓑ $-\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$
ⓒ $\dfrac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$	ⓓ $\dfrac{2(y^2-x^2)}{x^2+y^2}$	ⓔ $\dfrac{2(x-y)^2}{x^2+y^2}$
ⓕ $\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$	ⓖ $\dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$	ⓗ $\dfrac{2(x-y)^2}{(x^2+y^2)^2}$

解説

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\log(x^2+y^2) = \frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{2x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2(x^2+y^2)-2x\,2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right) = 2x\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

であるから，$\boxed{\mathbf{11}}$，$\boxed{\mathbf{12}}$，$\boxed{\mathbf{13}}$ は順に④, ⓖ, ⓑ である．

また関数 $f(x,y)=\log(x^2+y^2)$ は x, y に関して対称であるから，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ は計算をしなくても $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ の x と y を入れ換えたものであることがわかる．すなわち，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

である．したがって，その和は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

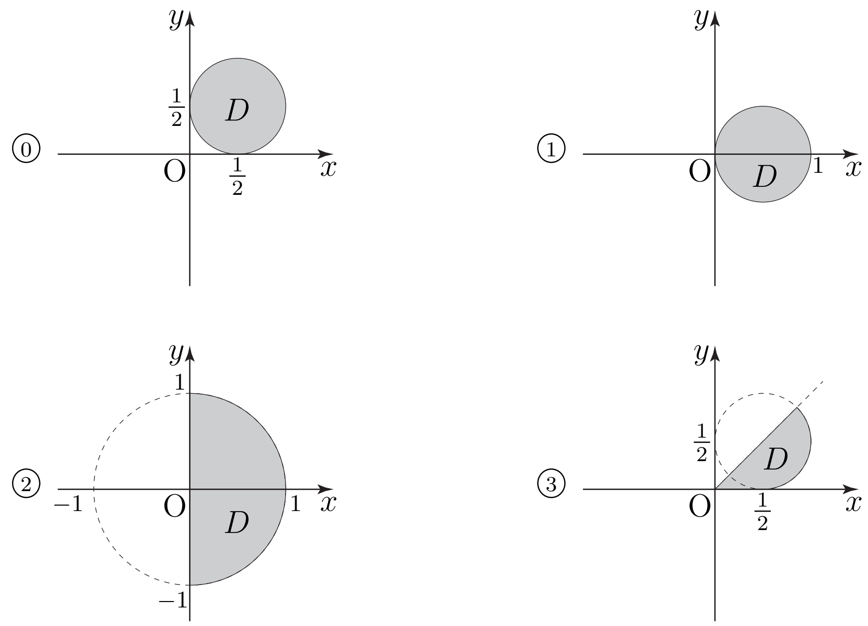
である．したがって $\boxed{\mathbf{14}}$ は ⓪ である．

問 5 重積分 $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\,dxdy$ を計算する．ここで D は xy 平面上の集合

$$D = \{\, (x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq x \,\}$$

である．集合 D を図示すると $\boxed{\mathbf{15}}$ となる．

$\boxed{\mathbf{15}}$ **の解答群**



集合 D は

$$D = \{\, (x, y) \mid \ 0 \leqq x \leqq 1,\ \boxed{\mathbf{16}} \leqq y \leqq \boxed{\mathbf{17}} \,\}$$

と表すことができる．

$\boxed{\mathbf{16}}$ ・ $\boxed{\mathbf{17}}$ **の解答群**

⓪ $-\sqrt{x - x^2} + \dfrac{1}{2}$	① $\sqrt{x - x^2} + \dfrac{1}{2}$	② $-\sqrt{x - x^2}$
③ $\sqrt{x - x^2}$	④ $-\sqrt{1 - x^2}$	⑤ $\sqrt{1 - x^2}$
⑥ $-\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{1}{2}$	⑦ x	⑧ 0
⑨ $\dfrac{1}{2}$	ⓐ 1	ⓑ 2

したがって

$$\iint_D \sqrt{x}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\boxed{\mathbf{16}}}^{\boxed{\mathbf{17}}} \sqrt{x}\,dy \right) dx = \int_0^1 \boxed{\mathbf{18}}\,dx$$

となる．

$\boxed{\mathbf{18}}$ の解答群

⓪ $x\sqrt{1-x}$　① $2x\sqrt{1-x}$　② $\dfrac{x\sqrt{x}}{3}$

③ $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$　④ $\dfrac{4}{3}x^2\sqrt{1-x}$　⑤ $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-x^2}}$

これより，$\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\,dxdy = \boxed{\mathbf{19}}$ である．

$\boxed{\mathbf{19}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{2}{15}$　① $\dfrac{4}{15}$　② $\dfrac{8}{15}$　③ $\dfrac{16}{15}$　④ $\dfrac{64}{315}$

解説　集合 D を定義している条件 $x^2+y^2 \leqq x$ は

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

と同値であるから，D は xy 平面上で中心 $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円とその内部であることがわかる．したがって $\boxed{\mathbf{15}}$ は ① である．

次に重積分を累次積分によって計算するために D を

$$D = \{\,(x,y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ \boxed{\mathbf{16}} \leqq y \leqq \boxed{\mathbf{17}}\,\}$$

と表現したい．x を固定したとき y の範囲を求める問題である．条件 $x^2+y^2 \leqq x$ より $y^2 \leqq x - x^2$ であるから，x を固定すると y の範囲は

$$-\sqrt{x-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{x-x^2}$$

であることがわかる．したがって $\boxed{\mathbf{16}}$ は ②，$\boxed{\mathbf{17}}$ は ③ である．

したがって

$$\iint_D \sqrt{x}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x}\,dy \right) dx$$

となる．括弧内の積分を計算すると，

$$\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x}\,dy = \sqrt{x}\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} 1\,dy = 2x\sqrt{1-x}$$

である．したがって， $\boxed{\textbf{18}}$ は ① である．次に x に関する積分

$$\int_0^1 2x\sqrt{1-x}\,dx$$

を計算する．ここで例えば $\sqrt{1-x}=t$ と置換すると $x=1-t^2$, $\dfrac{dx}{dt}=-2t$ であり，x が 0 から 1 まで変化するとき t は 1 から 0 まで変化するので

$$\begin{aligned}\int_0^1 2x\sqrt{1-x}\,dx &= \int_1^0 2(1-t^2)\,t\,\frac{dx}{dt}\,dt = -4\int_1^0 (t^2-t^4)\,dt = 4\int_0^1 (t^2-t^4)\,dt\\ &=4\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5\right]_{t=0}^1 = 4\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}\end{aligned}$$

となる．したがって，$\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\,dxdy = \boxed{\textbf{19}}$ は ② である．

第2分野　線形代数

〔問1〜問4：解答番号 $\boxed{\mathbf{20}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{38}}$ 〕

(注意) 行列 A の転置行列は ${}^tA$ で表す.

問1 (1) 3次正方行列 A の行列式の値が -2 であるとき，$2A$ の行列式の値は $\boxed{\mathbf{20}}$ であり，逆行列 A^{-1} の行列式の値は $\boxed{\mathbf{21}}$ である．また，転置行列 ${}^tA$ の行列式の値は $\boxed{\mathbf{22}}$ である.

$\boxed{\mathbf{20}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{22}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 4	④ 6	⑤ 16
⑥ $\frac{1}{2}$	⑦ $\frac{1}{4}$	⑧ $\frac{2}{3}$	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -4
ⓒ -6	ⓓ -16	ⓔ $-\frac{1}{2}$	ⓕ $-\frac{1}{4}$	ⓖ $-\frac{2}{3}$	

(2) 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ の値は $\boxed{\mathbf{23}}$ である.

$\boxed{\mathbf{23}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

解説

(1) 行列式において，ある行 (または列) にスカラー k をかけると，行列式は元の行列式の k 倍になる．問題の行列 A の (i,j) 成分を a_{ij} と表すと，

$$
\begin{aligned}
|2A| &= \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&=8|A| = -16.
\end{aligned}
$$

したがって，$\boxed{\textbf{20}}$ は ⓓ である．一般に，n 次正方行列を k 倍すると，行列式の値は元の値の k^n 倍となる．

次に，正方行列の積の行列式は行列式の積に等しいこと (式で表せば $|AB| = |A|\,|B|$) を使うと，

$$|A|\,|A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1$$

(ただし E は単位行列) であるから，$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = -\dfrac{1}{2}$ である．すなわち，$\boxed{\textbf{21}}$ は ⓔ である．

また，$|{}^tA| = |A| = -2$ であるから，$\boxed{\textbf{22}}$ は ⓐ である．

(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{第 1 行を第 4 行に加える}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{第 1 列で展開する}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{第 1 行の } -1 \text{ 倍を第 2 行に加え，} \\ \text{第 1 行の } -3 \text{ 倍を第 3 行に加える} \end{array}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} \quad \text{第 1 列で展開する}$$

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 2\,(4-1) = 6$$

であるから，$\boxed{\mathbf{23}}$ は ⑥ である．

問 2 3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x + 2y + az = -1 \\ -2x - 3y - 8z = a+3 \\ 4x + 7y + a^2 z = -9 \end{cases} \qquad (a \text{ は定数})$$

が解をもつための必要十分条件は $a \neq$ $\boxed{\mathbf{24}}$ である．特に，$a =$ $\boxed{\mathbf{25}}$ のときには，解は一意に決まらず，無数に存在する．

$\boxed{\mathbf{24}}$ ・ $\boxed{\mathbf{25}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ −1	ⓐ −2	ⓑ −3
ⓒ −4	ⓓ −5	ⓔ −6	ⓕ −7	ⓖ −8	

解説　問題の連立方程式の拡大係数行列に対して行基本変形を行ってみよう．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -1 \\ -2 & -3 & -8 & a+3 \\ 4 & 7 & a^2 & -9 \end{array}\right)$$

第 1 行の 2 倍を第 2 行に加え，
第 1 行の -4 倍を第 3 行に加える

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & 2a-8 & a+1 \\ 0 & -1 & a^2-4a & -5 \end{array}\right)$$

第 2 行を第 3 行に加える

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & 2a-8 & a+1 \\ 0 & 0 & a^2-2a-8 & a-4 \end{array}\right)$$

問題の連立方程式が解を「もたない」ための必要十分条件は，行基本変形で得られた最後の行列が

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & 2a-8 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0\text{ 以外} \end{array}\right)$$

となることであり，$a^2-2a-8=(a-4)(a+2)=0$ かつ $a-4\neq 0$ から $a=-2$ を得る．したがって，連立方程式が解を「もつ」ための必要十分条件は $a\neq -2$ である．以上より，$\boxed{\mathbf{24}}$ は ⓐ である．

次に，問題の連立方程式の解が無数に存在するのは，行基本変形で得られた最後の行列が

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -1 \\ 0 & 1 & 2a-8 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となるときであり，$a^2-2a-8=(a-4)(a+2)=0$ かつ $a-4=0$ から $a=4$ を得る．したがって，$\boxed{\mathbf{25}}$ は ④ である．

問 3　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 3 個のベクトル

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} k \\ k \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} k+6 \\ k+6 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{w}=\begin{pmatrix} 9 \\ k^2 \\ 2k+9 \end{pmatrix}$$

を考える．

(1) $\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{v}$ にも $\boldsymbol{w}$ にも平行となるのは $k=$ **26** のときである．

(2) $k\neq$ **26** の場合で，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ が 1 次従属 (線形従属) となるのは $k=$ **27** のときである．

(3) (1) と (2) の結果から，行列 $\begin{pmatrix} k & k+6 & 9 \\ k & k+6 & k^2 \\ -1 & 1 & 2k+9 \end{pmatrix}$ の階数 (ランク) は

$k=$ **26** のとき **28**，

$k=$ **27** のとき **29**，

$k\neq$ **26** かつ $k\neq$ **27** のとき **30**

となる．

26 ～ **30** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ −1	ⓐ −2	ⓑ −3
ⓒ −4	ⓓ −5	ⓔ −6	ⓕ −7	ⓖ −8	

解説

(1) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の第 3 成分に着目すれば，$\boldsymbol{u}/\!/\boldsymbol{v}$ となるのは $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{u}$ のときであることがわかる．これより，$k+6=-k$ となり，$k=-3$ を得る．この $k=-3$ を $\boldsymbol{w}$ の成分に代入すると $\boldsymbol{w}=-3\boldsymbol{u}$ となるから，$\boldsymbol{u}/\!/\boldsymbol{w}$ も成り立つことが確かめられる．よって，**26** の答は ⓑ である．

(2) $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ が 1 次従属となることと，それらを第 1,2,3 列にもつ行列式 $|\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}|$ の値が 0 となることは同じことである．

$$|\boldsymbol{u}\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}| = \begin{vmatrix} k & k+6 & 9 \\ k & k+6 & k^2 \\ -1 & 1 & 2k+9 \end{vmatrix} \quad \text{第 1 行の } -1 \text{ 倍を第 2 行に加える}$$

$$= \begin{vmatrix} k & k+6 & 9 \\ 0 & 0 & k^2-9 \\ -1 & 1 & 2k+9 \end{vmatrix} = -(k^2-9)\begin{vmatrix} k & k+6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(k^2-9)(2k+6) = -2(k+3)^2(k-3)$$

より，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が1次従属となるのは $k = \pm 3$ のときであるが，$k \neq -3$ なる条件が付いているので，$k = 3$ を得る．よって，$\boxed{\textbf{27}}$ の答は ③ である．

(3) 行列の階数は，1次独立となる行ベクトルあるいは列ベクトルの最大個数に等しい．(1) と (2) の結果から，$k \neq \pm 3$ のときは，1次独立な列ベクトルの最大個数は3である．一方，$k = -3$ のときは $\boldsymbol{u} /\!/ \boldsymbol{v} /\!/ \boldsymbol{w}$ であり，1次独立な列ベクトルの最大個数は1である．また，$k = 3$ に対する1次独立な列ベクトルの最大個数は1より大きく3より小さい，すなわち2である．したがって，$\boxed{\textbf{28}}$，$\boxed{\textbf{29}}$，$\boxed{\textbf{30}}$ は，それぞれ ①, ②, ③ である．

問 4 任意の正方行列 A は，対称行列 B と反対称行列 (交代行列) C を用いて

$$(*) \qquad A = B + C \quad ({}^tB = B,\ {}^tC = -C)$$

と表される．

(1) B および C を A と ${}^tA$ を用いて表すと，それぞれ

$$B = \boxed{\textbf{31}}, \quad C = \boxed{\textbf{32}}$$

となる．

$\boxed{\textbf{31}}$ ・ $\boxed{\textbf{32}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{A + {}^tA}{2}$　① $\dfrac{A - {}^tA}{2}$　② $\dfrac{{}^tA - A}{2}$　③ $-\dfrac{A + {}^tA}{2}$

(2) $(*)$ において $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$b_1 = \boxed{\textbf{33}}, b_2 = \boxed{\textbf{34}}, c_3 = \boxed{\textbf{35}}, c_4 = \boxed{\textbf{36}}$$

であり，B の固有値は $\boxed{\textbf{37}}$，C の固有値は $\boxed{\textbf{38}}$ である．

$\boxed{\mathbf{33}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{36}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ 6	⑦ 7	⑧ 8	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3
ⓒ -4	ⓓ -5	ⓔ -6	ⓕ -7	ⓖ -8	

$\boxed{\mathbf{37}}$ ・ $\boxed{\mathbf{38}}$ **の解答群**

⓪ 1 と 5	① 1 と 6	② 1 と 7	③ 2 と 5	④ 2 と 6
⑤ 2 と 7	⑥ 3 と 5	⑦ 3 と 6	⑧ 3 と 7	⑨ ± 1
ⓐ ± 2	ⓑ ± 3	ⓒ ± 4	ⓓ $\pm i$	ⓔ $\pm 2i$
ⓕ $\pm 3i$	ⓖ $\pm 4i$		(i は虚数単位)	

解説

(1) $A = B + C$ の両辺を転置すると，

$$ {}^tA = {}^t(B+C) = {}^tB + {}^tC = B - C $$

を得る．したがって

$$ \begin{aligned} A + {}^tA &= (B+C) + (B-C) = 2B, \\ A - {}^tA &= (B+C) - (B-C) = 2C \end{aligned} $$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{31}}$，$\boxed{\mathbf{32}}$ は，それぞれ ⓪, ① である．

(2) (1) の結果を使うと，

$$ B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} $$

を得るから，$\boxed{\mathbf{33}}$，$\boxed{\mathbf{34}}$，$\boxed{\mathbf{35}}$，$\boxed{\mathbf{36}}$ は，それぞれ ⑥, ②, ⓐ, ⓪ である．

次に，

$$ |B - \lambda E| = (6-\lambda)(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda - 2)(\lambda - 7) $$

より，B の固有値は 2 と 7 だから，$\boxed{\mathbf{37}}$ は ⑤ である．また，

$$ |C - \lambda E| = \lambda^2 + 4 $$

より，C の固有値は $\pm 2i$ だから，$\boxed{\mathbf{38}}$ は ⓔ である．

第３分野　常微分方程式

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{39}}$ 〜 $\boxed{\textbf{53}}$ 〕

(注意) 問 1〜問 3 における y は x の関数であり，関数 y に対して y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

問 1　微分方程式

$$(*) \qquad y' + 2y = 2x + 5$$

について考える.

(1) 対応する同次方程式

$$y' + 2y = 0$$

の一般解は

$$y(x) = \boxed{\textbf{39}}$$

である.

$\boxed{\textbf{39}}$ の解答群

⓪ Ce^{2x}	① Ce^{-2x}	② Cxe^{2x}	③ Cxe^{-2x}
④ $Ce^{\frac{x}{2}}$	⑤ $Ce^{-\frac{x}{2}}$	⑥ $Cxe^{\frac{x}{2}}$	⑦ $Cxe^{-\frac{x}{2}}$
⑧ $Cx + 2$	⑨ $x + C$	(C は任意定数)	

(2) 微分方程式 $(*)$ の特殊解 (特解) を

$$y_p(x) = ax + b$$

とおくと,

$$a = \boxed{\textbf{40}}, \quad b = \boxed{\textbf{41}}$$

である.

$\boxed{\textbf{40}}$ ・ $\boxed{\textbf{41}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ 5	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4
ⓐ -5	ⓑ $\dfrac{1}{2}$	ⓒ $-\dfrac{1}{2}$	ⓓ $\dfrac{5}{2}$	ⓔ $-\dfrac{5}{2}$

(3) (1) と (2) より，微分方程式 $(*)$ の一般解は

$$y(x) = \boxed{\textbf{42}}$$

である．

$\boxed{\textbf{42}}$ **の解答群**

⓪ $2x + \dfrac{5}{2}$	① $2e^{2x} + x + 4$
② $-e^{-2x} + x + 2$	③ $2(e^{\frac{x}{2}} + x) + 3$
④ $x(e^{2x} + 2) + 5$	⑤ $x(e^{-2x} + \dfrac{5}{2}) - \dfrac{1}{2}$
⑥ $\dfrac{1}{2}(e^{-\frac{x}{2}} + x + 5)$	⑦ $Ce^{2x} + 2x + 1$
⑧ $Ce^{-2x} + x + 2$	⑨ $Ce^{\frac{x}{2}} + 2x + 5$
ⓐ $Ce^{-2x} + 2x + \dfrac{5}{2}$	ⓑ $x(Ce^{2x} + 2) + 3$
ⓒ $x(Ce^{-2x} + 1) + 4$	ⓓ $x(Ce^{\frac{x}{2}} + 2) + 1$
ⓔ $Ce^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{5x - 1}{2}$	ⓕ $x(Ce^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{2}) + \dfrac{5}{2}$

(C は任意定数)

解説　(1)　これは定数係数線形微分方程式であるから, 特性方程式 $\lambda + 2 = 0$ の根 $\lambda = -2$ を利用すれば一般解 $z = Ce^{-2x}$ (C は任意定数) が得られる．したがって, $\boxed{\textbf{39}}$ は ① である．

(2)　$y_p(x) = ax + b$ を微分方程式 $(*)$ に代入すると

$$y_p' + 2y_p = a + 2(ax + b) = 2ax + (a + 2b) = 2x + 5$$

であり，これを a, b について解けば $a = 1, b = 2$ である．したがって，$\boxed{\textbf{40}}$ ，$\boxed{\textbf{41}}$ はそれぞれ，① , ②である．

(3)　微分方程式 $(*)$ の一般解 $y(x)$ は，解の重ね合わせの原理により，対応する同次方程式の一般解と $(*)$ の特殊解の和として表されるので，(1),(2) の結果より

$$y(x) = Ce^{-2x} + x + 2 \qquad (C \text{ は任意定数})$$

である．したがって，$\boxed{\textbf{42}}$ は ⑧ である．

問 2　関数 $y(x)$ についての微分方程式

$$(*) \qquad y' = \frac{(x-y)y}{x^2}$$

を $x > 0$ の範囲で考える．このとき，

$$z = \frac{y}{x}$$

とおくと，

$$y' = z + xz'$$

であるから，$(*)$ より関数 $z(x)$ についての微分方程式

$$z' = \boxed{\textbf{43}}$$

が得られる．これを解けば

$$z(x) = \boxed{\textbf{44}}$$

である．

43 の解答群

⓪ z	① $-z$	② z^2	③ $-z^2$
④ $z-z^2$	⑤ xz	⑥ $-xz$	⑦ xz^2
⑧ $-xz^2$	⑨ $x(z-z^2)$	ⓐ $\dfrac{z}{x}$	ⓑ $-\dfrac{z}{x}$
ⓒ $\dfrac{z^2}{x}$	ⓓ $-\dfrac{z^2}{x}$	ⓔ $\dfrac{z-z^2}{x}$	

44 の解答群

⓪ Ce^{x}	① Ce^{-x}	② $Ce^{\frac{x^2}{2}}$
③ $Ce^{-\frac{x^2}{2}}$	④ $\dfrac{1}{x+C}$	⑤ $\dfrac{1}{C-x}$
⑥ $\dfrac{2}{x^2+C}$	⑦ $\dfrac{2}{C-x^2}$	⑧ $\dfrac{1}{\log x+C}$
⑨ $\dfrac{1}{C-\log x}$	ⓐ $\dfrac{Ce^x}{1+Ce^x}$	ⓑ $\dfrac{C(x+1)}{1+C(x+1)}$

(C は任意定数)

したがって，微分方程式 $(*)$ の一般解は

$$y(x)=x\ \boxed{\mathbf{44}}$$

である．また，$y(1)=1$ を満たす方程式 $(*)$ の解は

$$y(x)=\boxed{\mathbf{45}}$$

であり，$x\to\infty$ のとき $y(x)$ は $\boxed{\mathbf{46}}$．

$\boxed{\mathbf{45}}$ **の解答群**

⓪ 1　① x　② e^{x-1}

③ e^{1-x}　④ xe^{x-1}　⑤ xe^{1-x}

⑥ $\dfrac{2}{x^2+1}$　⑦ $\dfrac{2}{3-x^2}$　⑧ $\dfrac{2x}{x^2+1}$

⑨ $\dfrac{2x}{3-x^2}$　ⓐ $\dfrac{1}{\log x+1}$　ⓑ $\dfrac{x}{\log x+1}$

ⓒ $\dfrac{1}{1-\log x}$　ⓓ $\dfrac{x}{1-\log x}$

$\boxed{\mathbf{46}}$ **の解答群**

⓪ 0 に収束する　① 1 に収束する

② ∞ に発散する　③ $-\infty$ に発散する

④ 振動する

解説　微分方程式 $(*)$ は同次形であり

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

と表される．そこで，未知関数

$$z = \frac{y}{x}$$

を考えれば，

$$y = xz, \qquad y' = (xz)' = z + xz'$$

である．これらの式を $(*)$ に代入して y および y' を消去すると

$$z + xz' = z - z^2$$

となり，さらに整理すると関数 $z(x)$ についての微分方程式

$$(**) \qquad z' = -\frac{z^2}{x}$$

が得られる．したがって， $\boxed{\textbf{43}}$ は ⓓ である．微分方程式 $(**)$ は

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x}$$

と変数を分離できて，この両辺を x で積分すると

$$\frac{1}{z} = \log x + C,$$

すなわち

$$z = \frac{1}{\log x + C} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

が得られる．したがって， $\boxed{\textbf{44}}$ は ⑧ であり，微分方程式 $(*)$ の一般解

$$y(x) = xz = \frac{x}{\log x + C} \qquad (C \text{ は任意定数})$$

が得られる．また，$y(1) = 1$ を満たす $(*)$ の解は

$$y(1) = \frac{1}{\log 1 + C} = \frac{1}{C} = 1$$

より $C = 1$, すなわち

$$y(x) = \frac{x}{\log x + 1}$$

であり，$y(x)$ は $x \to \infty$ のとき ∞ に発散する．したがって $\boxed{\textbf{45}}$, $\boxed{\textbf{46}}$ はそれぞれ，ⓑ , ② である．

問 3　微分方程式

$$y'' + 4y' + ky = 0 \quad (k \text{ は定数})$$

について考える．

(1) 一般解は

$k = 0$ のとき　　$y(x) = \boxed{\textbf{47}}$,

$k = 4$ のとき　　$y(x) = \boxed{\textbf{48}}$,

$k = 8$ のとき　　$y(x) = \boxed{\textbf{49}}$

である．

$\boxed{47}$ ～ $\boxed{49}$ **の解答群**

⓪ $C_1e^{2x}+C_2$　① $C_1e^{-2x}+C_2$

② $C_1e^{4x}+C_2$　③ $C_1e^{-4x}+C_2$

④ $C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$　⑤ $C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

⑥ $C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}$　⑦ $C_1\cos 4x+C_2\sin 4x$

⑧ $e^{2x}(C_1+C_2x)$　⑨ $e^{-2x}(C_1+C_2x)$

ⓐ $e^{4x}(C_1+C_2x)$　ⓑ $e^{-4x}(C_1+C_2x)$

ⓒ $e^{2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$　ⓓ $e^{-2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

(C_1, C_2 は任意定数)

(2) 正の値のみをとる特殊解 (特解) が存在するための必要十分条件は $\boxed{50}$ である．

$\boxed{50}$ **の解答群**

⓪ $k=0$	① $k\leqq 0$	② $k<0$	③ $k\geqq 0$
④ $k>0$	⑤ $k=4$	⑥ $k\leqq 4$	⑦ $k<4$
⑧ $k\geqq 4$	⑨ $k>4$	ⓐ $0\leqq k\leqq 4$	ⓑ $0<k<4$

次に，微分方程式

$$y''+4y'=6e^{-x}$$

を考えると，その一般解は

$$y(x)=\boxed{47}+\boxed{51}$$

である．

$\boxed{\mathbf{51}}$ **の解答群**

⓪ e^{-x}	① $2e^{-x}$	② $3e^{-x}$	③ $6e^{-x}$
④ $-e^{-x}$	⑤ $-2e^{-x}$	⑥ $-3e^{-x}$	⑦ $-6e^{-x}$
⑧ xe^{-x}	⑨ $2xe^{-x}$	ⓐ $3xe^{-x}$	ⓑ $6xe^{-x}$
ⓒ $-xe^{-x}$	ⓓ $-2xe^{-x}$	ⓔ $-3xe^{-x}$	ⓕ $-6xe^{-x}$

解説　(1)　$k=0$ のとき特性方程式

$$\lambda^2+4\lambda=\lambda(\lambda+4)=0$$

の根は $\lambda=-4,0$ なので，微分方程式の一般解は

$$y(x)=C_1e^{-4x}+C_2 \quad (C \text{ は任意定数})$$

である．

$k=4$ のとき特性方程式

$$\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2=0$$

の根は $\lambda=-2$ （重根）なので，微分方程式の一般解は

$$y(x)=e^{-2x}(C_1+C_2x) \quad (C \text{ は任意定数})$$

である．

$k=8$ のとき特性方程式

$$\lambda^2+4\lambda+8=(\lambda+2)^2+2^2=0$$

の根は $\lambda=-2\pm 2i$ なので，微分方程式の一般解は

$$y(x)=e^{-2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x) \quad (C \text{ は任意定数})$$

である．したがって，$\boxed{\mathbf{47}}$, $\boxed{\mathbf{48}}$, $\boxed{\mathbf{49}}$ はそれぞれ，③ , ⑨ , ⓓ である．

(2)　特性方程式

$$\lambda^2+4\lambda+k=0 \quad (k \text{ は定数})$$

の判別式

$$D = 4^2 - 4k = 4(4-k)$$

の符号によって次の３つの場合に分けて考える．

(a) $D > 0$, すなわち $k < 4$ のときは，相異なる２つの実数 a, b が特性方程式の根としてとれて，微分方程式の一般解は

$$y(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx} \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

と表される．このときは，正の値のみをとる特殊解として例えば

$$y(x) = e^{ax}$$

を選ぶことができる．

(b) $D = 0$, すなわち $k = 4$ のときは，ただ１つの実数 a が特性方程式の重根としてとれて，微分方程式の一般解は

$$y(x) = e^{ax}(C_1 + C_2 x) \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

と表される．このときも，正の値のみをとる特殊解として例えば

$$y(x) = e^{ax}$$

を選ぶことができる．

(c) $D < 0$, すなわち $k > 4$ のときは，互いに共役な複素数 $a \pm bi \ (b \neq 0)$ が特性方程式の根としてとれて，微分方程式の一般解は

$$y(x) = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) \quad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

と表される．このときは，特殊解をどのように選んでも正の値のみをとるようにはできない．したがって，微分方程式

$$y'' + 4y' + ky = 0 \quad (k \text{ は定数})$$

が正の値のみをとる特殊解を持つための必要十分条件は判別式 $D \geqq 0$, すなわち $k \leqq 4$ である．したがって， $\boxed{\mathbf{50}}$ は ⑥ である．

微分方程式

$$y'' + 4y' = 6e^{-x}$$

の右辺の形から $y_p(x) = Ae^{-x}$ (A は定数) とおいて方程式に代入すると，

$$y_p{}'' + 4y_p{}' = (Ae^{-x})'' + 4(Ae^{-x})' = Ae^{-x} - 4Ae^{-x} = -3Ae^{-x} = 6e^{-x}.$$

よって，$A = -2$ のとき $y_p(x) = -2e^{-x}$ は特殊解である．(1) の結果と合わせて解の重ね合わせの原理により，微分方程式の一般解は

$$y(x) = C_1e^{-4x} + C_2 - 2e^{-x} \qquad (C_1, C_2 \text{は任意定数})$$

である．したがって，$\boxed{\mathbf{51}}$ は ⑤ である．

問 4 xy 平面において，中心が x 軸上にあり原点を通るすべての円を表す微分方程式を求める．これらの円は，0 でない任意定数 c を用いて

$$(*) \qquad (x-c)^2 + y^2 = c^2$$

と表される．y を x の関数と考えて方程式 $(*)$ の両辺を x で微分すると，$\boxed{\mathbf{52}}$ が得られる．

$\boxed{\mathbf{52}}$ **の解答群**

⓪ $(x-c)^2 + (y')^2 = 0$	① $(x-c)^2 + (y')^2 = c^2$
② $2(x-c) + (y')^2 = 0$	③ $2(x-c) + (y')^2 = 2c$
④ $2(x+y) = 0$	⑤ $2(x+y-c) = 0$
⑥ $2(x+y') = 0$	⑦ $2(x+y'-c) = 0$
⑧ $2(x+yy') = 0$	⑨ $2(x+yy'-c) = 0$

さらに，方程式 $\boxed{\mathbf{52}}$ と $(*)$ から c を消去すると，微分方程式 $\boxed{\mathbf{53}}$ が得られる．

53 **の解答群**

⓪ $yy' = 0$　① $y' + 1 = 0$

② $x + y' = 0$　③ $x + yy' = 0$

④ $y^2 - xy' = 0$　⑤ $y^2 - (y')^2 = 0$

⑥ $y^2 - xyy' = 0$　⑦ $(2y - x)y' - y = 0$

⑧ $x^2 + 2xy' - y^2 = 0$　⑨ $x^2 + 2xyy' - y^2 = 0$

ⓐ $x + y + (x - y)y' = 0$

解説　y を x の関数と考えて方程式 $(*)$ の両辺を x で微分すると，方程式

$$(**) \qquad 2(x - c) + 2yy' = 2(x + yy' - c) = 0$$

が得られる．したがって，$\boxed{\mathbf{52}}$ は ⑨ である．さらに，方程式 $(**)$ は

$$x + yy' = c$$

と変形され，これを用いて $(*)$ から c を消去すると，微分方程式

$$x^2 + 2xyy' - y^2 = 0$$

が得られる．したがって，$\boxed{\mathbf{53}}$ は ⑨ である．

第4分野　確率・統計

〔問1～問7：解答番号 $\boxed{\mathbf{54}}$ ～ $\boxed{\mathbf{72}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X), V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均)，分散を表す．

問1　確率変数 X の確率分布が次で与えられている．

X の値	100	40	10
確率	$\dfrac{1}{a+6}$	$\dfrac{5}{a+6}$	$\dfrac{a}{a+6}$

ここで，a は正の定数である．期待値が $E(X)=20$ のとき，$a=$ $\boxed{\mathbf{54}}$ であり，分散は $V(X)=$ $\boxed{\mathbf{55}}$ である．

$\boxed{\mathbf{54}}$ ・ $\boxed{\mathbf{55}}$ **の解答群**

⓪ 16　① 18　② 20　③ 22　④ 24

⑤ 250　⑥ 400　⑦ 425　⑧ 800　⑨ 825

解説　1 等が 1 本, 2 等が 5 本, 3 等が a 本となるようなハズレ無しのくじ引きに相当する．

期待値の定義に基づいて,

$$E(X)=100\cdot\frac{1}{a+6}+40\cdot\frac{5}{a+6}+10\cdot\frac{a}{a+6}=\frac{300+10a}{a+6}=20$$

であるから, $a=18$ を得る．したがって $\boxed{\mathbf{54}}$ は①である．分散は

$$E(X^2)=100^2\cdot\frac{1}{24}+40^2\cdot\frac{5}{24}+10^2\cdot\frac{18}{24}=\frac{10000+8000+1800}{24}=825$$

より,

$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=825-400=425$$

となる．したがって $\boxed{\mathbf{55}}$ は⑦である．

問 2　独立な 2 つの事象 A, B に対して，

$$P(A) = \frac{1}{3}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}$$

とする．このとき，

$P(A \cap B) = \boxed{\mathbf{56}}$，　$P(A \cup B) = \boxed{\mathbf{57}}$，　$P(A^c) = \boxed{\mathbf{58}}$，　$P(A^c \cap B) = \boxed{\mathbf{59}}$

である．ただし，A^c は A の余事象である．

$\boxed{56}$ 〜 $\boxed{59}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\frac{1}{2}$	③ $\frac{1}{3}$	④ $\frac{2}{3}$	⑤ $\frac{1}{4}$	⑥ $\frac{3}{4}$
⑦ $\frac{1}{5}$	⑧ $\frac{2}{5}$	⑨ $\frac{3}{5}$	ⓐ $\frac{4}{5}$	ⓑ $\frac{1}{6}$	ⓒ $\frac{5}{6}$	

解説　事象 A と事象 B は独立であるから，

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

である．したがって, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ となり,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3}$$

である．また, $P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{2}{3}$ であり, 事象 A^c と事象 B は独立であるから,

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B) = \frac{1}{3}$$

となる．あるいは

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

から求めることもできる．したがって $\boxed{\mathbf{56}}$, $\boxed{\mathbf{57}}$, $\boxed{\mathbf{58}}$, $\boxed{\mathbf{59}}$ はそれぞれⓑ, ④, ④, ③である．

問 3　確率変数 X の確率密度関数を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 3e^{-3x} & (x \geqq 0) \end{cases}$$

とする．

(1)　$x \geqq 0$ において，X の分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ は

$$F(x) = \boxed{\mathbf{60}}$$

である．

(2)　$t < 3$ において，X の積率母関数 $M(t) = E\left(e^{tX}\right)$ は

$$M(t) = \boxed{\mathbf{61}}$$

である．

$\boxed{60}$ の解答群

⓪ e^{-x}　① e^{-3x}　② $3e^{-x}$　③ $3e^{-3x}$

④ $1 - e^{-x}$　⑤ $1 - e^{-3x}$　⑥ $1 - 3e^{-x}$　⑦ $1 - 3e^{-3x}$

$\boxed{61}$ の解答群

⓪ $3e^{-3t}$　① e^{-3t}　② e^{t-3}　③ e^{3-t}

④ $t - 3$　⑤ $3 - t$　⑥ $\dfrac{1}{t-3}$　⑦ $\dfrac{1}{3-t}$

⑧ $\dfrac{3}{t-3}$　⑨ $\dfrac{3}{3-t}$

解説

(1) $x \geqq 0$ のとき, 分布関数の定義より,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{0}^{x} 3e^{-3s}ds = \left[-e^{-3s}\right]_0^x = 1 - e^{-3x}$$

となる．したがって $\boxed{\mathbf{60}}$ は⑤である．

(2) $t < 3$ のとき, 積率母関数の定義より,

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f(x)dx = \int_{0}^{\infty} 3e^{tx}e^{-3x}dx = \left[\frac{3}{t-3}e^{(t-3)x}\right]_0^{\infty} = \frac{3}{3-t}$$

となる．したがって $\boxed{\mathbf{61}}$ は⑨である．

問 4　独立な確率変数 X, Y の期待値 $E(X)$, $E(Y)$ がともに存在すると仮定する．このとき，

$$E(XY) = \boxed{\textbf{62}}$$

である．したがって，X と Y の共分散 $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\Big(\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}\Big)$ は

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \boxed{\textbf{63}}$$

である．

$\boxed{62}$ ・ $\boxed{63}$ の解答群

⓪ $E(X)E(Y)$　　① $E(X) + E(Y)$　　② $E(X^2) - E(Y^2)$

③ $\{E(X)\}^2 - \{E(Y)\}^2$　　④ 0　　⑤ 1

⑥ 2

解説　独立な確率変数 X, Y の期待値 $E(X)$, $E(Y)$ がともに存在するとき，$E(XY) = E(X)E(Y)$ である．例えば確率変数 X, Y がともに連続的確率変数であれば次のように示される．X, Y の密度関数をそれぞれ $f_X(x), f_Y(y)$ とする．X と Y は独立であるから，X, Y の同時確率密度関数は

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dydx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dydx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = E(X)E(Y) \end{aligned}$$

となる．他の場合でも同様に示すことができる．したがって $\boxed{\textbf{62}}$ は⓪である．

共分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X,Y) &= E\Big(\{X - E(X)\}\{Y - E(Y)\}\Big) \\ &= E\Big(XY - E(X)Y - XE(Y) + E(X)E(Y)\Big) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

と書き直せる．$E(XY) = E(X)E(Y)$ であるから，

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

となる．したがって $\boxed{\mathbf{63}}$ は④である．

問 5 確率変数 X_1, X_2, X_3 は互いに独立で，いずれも正規分布 $N(2, 1)$ に従うものとする．このとき，確率変数

$$Y = X_1 + 2X_2 + 3X_3$$

は平均 $\boxed{\mathbf{64}}$，分散 $\boxed{\mathbf{65}}$ の $\boxed{\mathbf{66}}$ に従う．

$\boxed{\mathbf{64}}$ ・ $\boxed{\mathbf{65}}$ の解答群

⓪ 6　① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

$\boxed{\mathbf{66}}$ の解答群

⓪ 一様分布　① 2 項分布　② ポアソン分布　③ 正規分布

④ 指数分布　⑤ t 分布

解説 期待値の線形性より，

$$E(Y) = E(X_1+2X_2+3X_3) = E(X_1)+2E(X_2)+3E(X_3) = 2+2\cdot2+3\cdot3 = 12,$$

である．また，確率変数 X_1, X_2, X_3 は互いに独立であるから，

$$V(Y) = V(X_1+2X_2+3X_3) = V(X_1)+2^2V(X_2)+3^2V(X_3) = 1+4\cdot1+9\cdot1 = 14$$

となる． さらに，正規分布の再生性より Y が正規分布に従うことがわかる． したがって $\boxed{\mathbf{64}}$，$\boxed{\mathbf{65}}$，$\boxed{\mathbf{66}}$ は③, ④, ③である．

問 6　赤玉と白玉が 1 : 4 の比率で入っている袋の中から無作為に玉を 1 個取り出し，色を確認してから袋に戻す試行を 5 回行う．5 回の試行のうち赤玉の出た回数を表す確率変数を X とすると，X は $\boxed{\textbf{67}}$ に従う．このとき，期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ は，それぞれ

$$E(X) = \boxed{\textbf{68}}, \quad V(X) = \boxed{\textbf{69}}$$

である．

$\boxed{\textbf{67}}$ の解答群

⓪ 一様分布　① 2 項分布　② ポアソン分布　③ 正規分布
④ 指数分布　⑤ t 分布

$\boxed{\textbf{68}}$・$\boxed{\textbf{69}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{5}{4}$　⑥ $\frac{1}{5}$
⑦ $\frac{2}{5}$　⑧ $\frac{3}{5}$　⑨ $\frac{4}{5}$　ⓐ $\frac{1}{16}$　ⓑ $\frac{15}{16}$　ⓒ $\frac{1}{25}$　ⓓ $\frac{24}{25}$

解説　ある試行の結果起こる事象を A とし, その確率 $P(A)$ を p とする．この試行を n 回繰り返したときに A が起こった回数を表す確率変数を X とすると, X は 2 項分布 $B(n,p)$ に従う．この問題では赤玉が出るという事象が A に相当し, X は 2 項分布に従う．したがって $\boxed{\textbf{67}}$ は①である．

2 項分布 $B(n,p)$ の期待値と分散は公式を覚えていれば

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p)$$

に代入すればよい．この問題では $n = 5, p = \frac{1}{5}$ であるから,

$$E(X) = 1, \quad V(X) = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

である．したがって $\boxed{\textbf{68}}$, $\boxed{\textbf{69}}$ は①, ⑨である．公式を覚えていなくても, 以下のように考えれば導き出せる．第 i 回目の試行で赤玉が出れば 1, 出なければ 0 の値をとる確率変数 $X_i (i = 1, \ldots, 5)$ を考える．これを用いると,

$$X = \sum_{i=1}^{5} X_i$$

と表すことができる．各 X_i は互いに独立だから，

$$E(X)=E\left(\sum_{i=1}^{5}X_i\right)=\sum_{i=1}^{5}E(X_i),\quad V(X)=V\left(\sum_{i=1}^{5}X_i\right)=\sum_{i=1}^{5}V(X_i)$$

となる．X_i の期待値は

$$E(X_i)=\frac{1}{5}\cdot 1+\frac{4}{5}\cdot 0=\frac{1}{5}$$

であり，

$$E(X_i^2)=\frac{1}{5}\cdot 1^2+\frac{4}{5}\cdot 0^2=\frac{1}{5}$$

から分散は

$$V(X_i)=E(X_i^2)-E(X_i)^2=\frac{1}{5}-\frac{1}{25}=\frac{4}{25}$$

である．したがって，

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}E(X_i)=1,\quad V(X)=\sum_{i=1}^{5}V(X_i)=\frac{4}{5}$$

を得る．

問 7 ある植物の生育調査を行った．この植物は一年草で，調査時期における丈 (高さ) は母平均 μ cm, 母分散 σ^2 cm^2 の正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ に従うと考えられる．この調査では無作為に 40 本の植物を選び，丈を測定した．その測定値 $x_1,\ldots,x_{40}$ (単位：cm) をもとに母平均 μ の信頼度（信頼係数）95% の信頼区間を求めたい．

標本平均を $\overline{X}$ とする．このとき，母分散の推定量として標本不偏分散 V を用いると，

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{V/40}}$$

は自由度 39 の $\boxed{\textbf{70}}$ に従う．これに基づいて数表を調べると，

$$P\left(-2.023\leqq\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{V/40}}\leqq 2.023\right)\fallingdotseq 0.95$$

であることがわかり，この式を書きかえると，

$$P\left(\overline{X}-2.023\times\sqrt{\frac{V}{40}}\leqq\mu\leqq\overline{X}+2.023\times\sqrt{\frac{V}{40}}\right)\fallingdotseq 0.95$$

となる．

標本平均 $\overline{X}$ および標本不偏分散 V の実現値 $\overline{x}, v$ を計算すると，それぞれ

$$\overline{x} = \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{40} x_i = 30, \qquad v = \frac{1}{39}\sum_{i=1}^{40}(x_i - 30)^2 = 160$$

となった．これより $\overline{x}, v$ に対する μ の信頼度 95% の信頼区間は，小数点以下第 3 位を四捨五入すると，

$$\boxed{\mathbf{71}} \leqq \mu \leqq \boxed{\mathbf{72}}$$

となる．

70 の解答群

⓪ 一様分布　① 2 項分布　② ポアソン分布　③ 正規分布

④ 指数分布　⑤ t 分布

71 ・ 72 の解答群

⓪ 23.93　① 25.95　② 27.98　③ 30.00　④ 32.02

⑤ 34.05　⑥ 36.07

解説　母分散が未知の場合における, 母平均の区間推定についての問題である．母分散が既知であれば標本平均を標準化した

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/40}}$$

が標準正規分布に従うことを利用すればよい．母分散が未知であるから母分散の代わりに不偏推定量

$$V = \frac{1}{39}\sum_{i=1}^{40}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

で置き換えた

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{V/40}}$$

で考える．このとき T は自由度 39 の t 分布に従う．したがって $\boxed{\mathbf{70}}$ は⑤である．実際,

$$S = \sum_{i=1}^{40}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

とおくと $S = 39V$ であり,

$$\frac{S}{\sigma^2} = \frac{39}{\sigma^2}V$$

は自由度 39 の χ^2 分布に従う. T を書き換えると

$$T = \frac{\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{40}}}{\dfrac{\sqrt{39V/\sigma^2}}{39}}$$

となる. ここで

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{40}}$$

は標準正規分布に従うから, T が自由度 39 の t 分布に従うことがわかる.

標本数 n が十分に大きければ, 自由度 $n-1$ の t 分布は標準正規分布で近似できるため, 母分散が既知の場合と同様に標準正規分布の数表を用いて信頼区間を求めることが多いが, この問題のように $n = 40$ 程度の場合は t 分布の数表を用いて信頼区間を求める.

実現値 $\overline{x}, v$ に対する μ の信頼度 95% の信頼区間は,

$$P\left(\overline{X} - 2.023 \times \sqrt{\frac{V}{40}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 2.023 \times \sqrt{\frac{V}{40}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

より,

$$\overline{X} - 2.023 \times \sqrt{\frac{V}{40}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 2.023 \times \sqrt{\frac{V}{40}}$$

の $\overline{X}, V$ に実現値 $\overline{x} = 30, v = 160$ を代入して小数点以下第 3 位を四捨五入をすると

$$25.95 \leqq \mu \leqq 34.05$$

が得られる. したがって $\boxed{\textbf{71}}$, $\boxed{\textbf{72}}$ は①, ⑤である.