EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2009 年度 工学系数学統一試験

問題の解説

解答上の注意

(1) 解答として最も相応しいものを指定された解答群から選んで解答用紙にマークすること．ただし，解答群に相応しいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．

例えば， $\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して ⓒ と解答する場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(4) $\log x$ は x の自然対数とする．

第１分野　微分積分

〔問１～問６：解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ ～ $\boxed{\mathbf{17}}$ 〕

問１　次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)=\boxed{\mathbf{1}},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\log(x+1)-x}{x^2}=\boxed{\mathbf{2}}.$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ -2　① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ 0　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 1
⑥ 2　⑦ ∞　⑧ $-\infty$

解説　$\boxed{\mathbf{1}}$ については $x\to\infty$ としたとき，$\sqrt{x^2-2x}\to\infty$, $x\to\infty$ だから "$\infty-\infty$" の不定形である．この場合は

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-2x}-x &= \frac{\sqrt{x^2-2x}-x}{1}\\ &= \frac{(\sqrt{x^2-2x}-x)(\sqrt{x^2-2x}+x)}{\sqrt{x^2-2x}+x}\\ &= \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x}\end{aligned}$$

となることより

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}=-1\end{aligned}$$

よって $\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ① である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ については $x\to 0$ のとき，分子の $(x+1)\log(x+1)-x$ と分母の x^2 はともに 0 に近付くので "$\frac{0}{0}$" の不定形である．ここではロピタルの定理を用いて極限を求めると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\log(x+1)-x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{2x} \quad \text{(分母と分子のそれぞれを微分する)}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

従って $\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは ④ である．ここで，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to\pm\infty}\log\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = \log e = 1$$

という，対数関数に関する基本的な極限は覚えておこう．

また，マクローリンの定理から，ランダウの記号を用いれば，$\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$ と表されるため，以下のようにしても結果が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{(x+1)\log(x+1)-x}{x^2} &= \frac{(x+1)\left(x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^2)\right)-x}{x^2}\\
&= \frac{x^2-\frac{x^3}{2}+x-\frac{x^2}{2}+(x+1)\mathrm{o}(x^2)-x}{x^2}\\
&= \frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+(x+1)\mathrm{o}(x^2)}{x^2}\\
&= \frac{1}{2}-\frac{x}{2}+(x+1)\frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2}\\
&= \frac{1}{2}+\mathrm{o}(1)
\end{aligned}$$

より

$$\frac{(x+1)\log(x+1)-x}{x^2} \to \frac{1}{2} \quad x\to 0$$

が成り立つ．

問 2 関数 $\tan x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\tan^{-1}x$ で表す．$f(x)$ を

$$f(x) = x + \tan^{-1}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

で定義される関数とするとき，

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{\mathbf{3}}, \qquad f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{\mathbf{4}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{2}$	① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	③ 1
④ $\dfrac{\pi}{6}$	⑤ $\dfrac{\pi}{4}$	⑥ $\dfrac{\pi}{3}$	

$\boxed{4}$ **の解答群**

⓪ -2	① $-\dfrac{1}{2}$	② $\dfrac{2}{5}$	③ $\dfrac{3}{7}$
④ $\dfrac{4}{7}$	⑤ $\dfrac{7}{4}$	⑥ $\dfrac{7}{3}$	⑦ $\dfrac{5}{2}$
⑧ $\sqrt{6}-2$	⑨ $4-2\sqrt{3}$	ⓐ $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	ⓑ $1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

解説 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲の x で $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ をみたすのは $x = \dfrac{\pi}{6}$ だから $\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$ である．よって

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

となるため $\boxed{\mathbf{3}}$ の答えは ④ である．

$y = \tan^{-1} x$ とおくと $\tan y = x$ だから，この両辺を x で微分すれば $\dfrac{1}{\cos^2 y}\dfrac{dy}{dx} = 1$ が得られる．ここで，$\dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ を上式に代入して，両辺を $1 + x^2$ で割れば $y = \tan^{-1} x$ の導関数は $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$ であることがわかる．ゆえに $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x^2}$ だから

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{7}{4}$$

が得られ，$\boxed{\mathbf{4}}$ の答えは ⑤ である．

問 3 s を正の定数として，積分 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}\cos x\,dx$ を求める．まず，部分積分法により

$$\begin{aligned}\int e^{-sx}\cos x\,dx &= e^{-sx}\sin x + \int \boxed{\mathbf{5}}\,dx \\ &= e^{-sx}\sin x - \boxed{\mathbf{6}} - \int \boxed{\mathbf{7}}\,dx\end{aligned}$$

である．これより

$$\int e^{-sx}\cos x\,dx = \boxed{\mathbf{8}} + C \quad (C\text{ は積分定数})$$

となる．この不定積分を利用して，

$$\int_0^\infty e^{-sx}\cos x\,dx = \boxed{\mathbf{9}}$$

が得られる．

$\boxed{5}$ ・ $\boxed{6}$ ・ $\boxed{7}$ **の解答群**

⓪ $e^{-sx}\sin x$　① $e^{-sx}\cos x$　② $se^{-sx}\sin x$

③ $se^{-sx}\cos x$　④ $s^2e^{-sx}\sin x$　⑤ $s^2e^{-sx}\cos x$

⑥ $\dfrac{1}{s}e^{-sx}\sin x$　⑦ $\dfrac{1}{s}e^{-sx}\cos x$　⑧ $\dfrac{1}{s^2}e^{-sx}\sin x$

⑨ $\dfrac{1}{s^2}e^{-sx}\cos x$

$\boxed{8}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{e^{-sx}}{s^2+1}(\sin x + s\cos x)$　① $\dfrac{e^{-sx}}{s^2+1}(\sin x - s\cos x)$

② $\dfrac{e^{-sx}}{s^2-1}(\sin x + s\cos x)$　③ $\dfrac{e^{-sx}}{s^2-1}(\sin x - s\cos x)$

④ $\dfrac{se^{-sx}}{s^2+1}(s\sin x + \cos x)$　⑤ $\dfrac{se^{-sx}}{s^2+1}(s\sin x - \cos x)$

⑥ $\dfrac{se^{-sx}}{s^2-1}(s\sin x + \cos x)$　⑦ $\dfrac{se^{-sx}}{s^2-1}(s\sin x - \cos x)$

$\boxed{9}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{s^2+1}$　① $-\dfrac{1}{s^2+1}$　② $\dfrac{1}{s^2-1}$　③ $-\dfrac{1}{s^2-1}$

④ $\dfrac{s}{s^2+1}$　⑤ $-\dfrac{s}{s^2+1}$　⑥ $\dfrac{s}{s^2-1}$　⑦ $-\dfrac{s}{s^2-1}$

解説　部分積分法の公式

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

を $f(x) = e^{-sx}$, $g(x) = \sin x$ として用いれば, $f'(x) = -se^{-sx}$, $g'(x) = \cos x$ だから

$$\int e^{-sx}\cos x\,dx = e^{-sx}\sin x - \int(-se^{-sx})\sin x\,dx = e^{-sx}\sin x + \int se^{-sx}\sin x\,dx \quad \cdots(*)$$

である. 従って $\boxed{5}$ の答えは ② である.

上記の部分積分法の公式を今度は $f(x) = se^{-sx}$, $g(x) = -\cos x$ として用いれば, $f'(x) = -s^2e^{-sx}$, $g'(x) = \sin x$ だから

$$\begin{aligned}\int se^{-sx}\sin x\,dx &= se^{-sx}(-\cos x) - \int \left(-s^2e^{-sx}\right)(-\cos x)\,dx \\ &= -se^{-sx}\cos x - \int s^2e^{-sx}\cos x\,dx\end{aligned}$$

となるため, $(*)$ より

$$\int e^{-sx}\cos x\,dx = e^{-sx}\sin x - se^{-sx}\cos x - \int s^2e^{-sx}\cos x\,dx \quad \cdots (**)$$

である. よって $\boxed{\mathbf{6}}$ の答えは ③ , $\boxed{\mathbf{7}}$ の答えは ⑤ である.

$(**)$ の右辺の $\displaystyle\int s^2e^{-sx}\cos x\,dx$ を左辺に移項すれば

$$(s^2+1)\int e^{-sx}\cos x\,dx = e^{-sx}\sin x - se^{-sx}\cos x$$

となり, この両辺を s^2+1 で割り, 右辺に積分定数を加えれば

$$\int e^{-sx}\cos x\,dx = \frac{e^{-sx}}{s^2+1}(\sin x - s\cos x) + C$$

が得られるため, $\boxed{\mathbf{8}}$ の答えは ① である. $|\sin t| \leqq 1$, $|\cos t| \leqq 1$ だから

$$|\sin t - s\cos t| \leqq |\sin t| + s|\cos t| \leqq 1 + s$$

が成り立つため,

$$\left|\frac{e^{-st}}{s^2+1}(\sin t - s\cos t)\right| \leqq \frac{e^{-st}(1+s)}{s^2+1} \quad \cdots (***)$$

である. s は正の定数であるため, $t \to \infty$ のとき, $e^{-st} \to 0$ であるから $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-st}(1+s)}{s^2+1} = 0$ である. 従って $(***)$ から

$$\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-st}}{s^2+1}(\sin t - s\cos t) = 0$$

あることと, 上の結果から

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-sx}\cos x\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-sx}\cos x\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{-sx}}{s^2+1}(\sin x - s\cos x) + C\right]_0^t \\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{e^{-st}}{s^2+1}(\sin t - s\cos t) + \frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s}{s^2+1}\end{aligned}$$

が得られる. ゆえに $\boxed{\mathbf{9}}$ の答えは ④ である.

問 4　関数 $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2$ を考える．$z = f(x,y)$ のグラフ上の点 $(1,1,f(1,1))$ における接平面の方程式は

$$\boxed{\mathbf{10}}\, x + \boxed{\mathbf{11}}\, y - z = \boxed{\mathbf{12}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{10}}$ ・ $\boxed{\mathbf{11}}$ ・ $\boxed{\mathbf{12}}$ の解答群

⓪ 1	① -1	② 2	③ -2	④ 3	⑤ -3
⑥ 4	⑦ -4	⑧ 5	⑨ -5	ⓐ 6	ⓑ -6
ⓒ 7	ⓓ -7	ⓔ 8	ⓕ -8	ⓖ 9	ⓗ -9

解説　全微分可能な関数 $z = f(x,y)$ のグラフ上の点 $(p,q,f(p,q))$ における接平面の方程式は

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(p,q)(x-p) + \frac{\partial f}{\partial y}(p,q)(y-q) + f(p,q)$$

で与えられる．$f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2$ のとき $f(1,1) = 5$ であり，$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y$ だから $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 6$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4$ が成り立つ．ゆえに $z = f(x,y)$ の $(1,1,f(1,1))$ における接平面の方程式は

$$z = 6(x-1) + 4(y-1) + 5$$

となるため，この両辺を -1 倍して右辺の x, y の項を左辺に移項すれば

$$6x + 4y - z = 5$$

が得られる．よって $\boxed{\mathbf{10}}$ の答えは ⓐ, $\boxed{\mathbf{11}}$ の答えは ⑥ , $\boxed{\mathbf{12}}$ の答えは ⑧ である．

問 5　関数 $F(x,y)$ は連続な偏導関数

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$$

をもつとする．$y = y(x)$ が x の関数として微分可能であるとき，

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = \boxed{\mathbf{13}}$$

である．

13 の解答群

⓪ $F\left(1, \dfrac{dy}{dx}(x)\right)$

① $\dfrac{\partial F}{\partial x}\left(1, \dfrac{dy}{dx}(x)\right)$

② $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))\dfrac{dy}{dx}(x)$

③ $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))\dfrac{dy}{dx}(x)$

④ $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + F\left(x, \dfrac{dy}{dx}(x)\right)$

⑤ $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))$

⑥ $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))\dfrac{dy}{dx}(x)$

解説　$F(x, y)$ が x, y について偏微分可能な 2 変数関数で, 偏導関数 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ はともに連続関数であり, さらに x, y が t の関数 $x = x(t)$, $y = y(t)$ であるとする．このとき, $F(x(t), y(t))$ は t の 1 変数関数であるが, この関数の導関数 $\dfrac{d}{dt}F(x(t), y(t))$ は

$$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}(t)$$

によって与えられる．とくに $x = x(t) = t$ の場合は $\dfrac{dx}{dt}(t) = 1$ であるから,

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))\frac{dy}{dx}(x)$$

である．従って $\boxed{\textbf{13}}$ の答えは ⑥ である．

問 6　xy 平面上の集合 D が

$$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq 1\right\}$$

で与えられているとき，重積分

$$\iint_D xe^{y^2}\,dxdy$$

の値を求める．D は

$$D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \leqq y \leqq 1,\ \boxed{\textbf{14}} \leqq x \leqq \boxed{\textbf{15}}\right\}$$

と表されるので,

$$\iint_D xe^{y^2}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\boxed{\textbf{14}}}^{\boxed{\textbf{15}}} xe^{y^2}\,dx\right) dy = \int_0^1 \boxed{\textbf{16}}\,dy = \boxed{\textbf{17}}$$

である．

$\boxed{14}$ ・ $\boxed{15}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② y　③ y^2　④ $\sqrt{y}$

$\boxed{16}$ の解答群

⓪ e^{y^2}　① $\dfrac{1}{2}e^{y^2}$　② ye^{y^2}　③ $\dfrac{y}{2}e^{y^2}$　④ $y^2e^{y^2}$

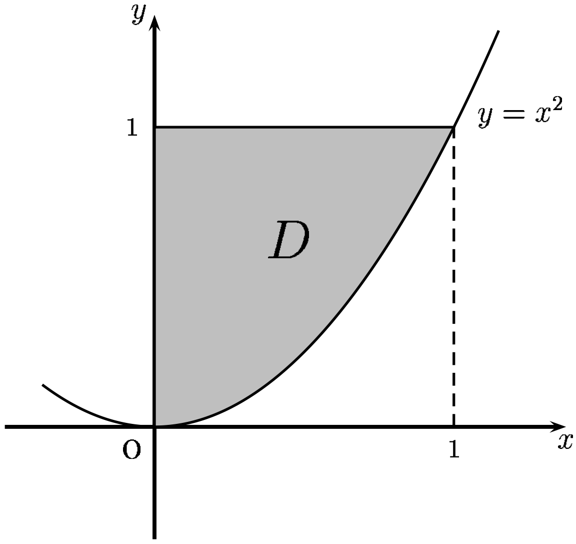
⑤ $\dfrac{y^2}{2}e^{y^2}$　⑥ $y^4e^{y^2}$　⑦ $\dfrac{y^4}{4}e^{y^2}$

$\boxed{17}$ の解答群

⓪ $\dfrac{e-2}{2}$　① $\dfrac{e-1}{4}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{e-1}{2}$　④ 1

⑤ $e-1$　⑥ $\dfrac{e}{4}$　⑦ $\dfrac{e}{2}$　⑧ e

解説　与えられた領域 $D = \left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \leqq x \leqq 1,\ x^2 \leqq y \leqq 1\right\}$ は第 1 象限にあり, 放物線 $y = x^2$, 直線 $y = 1$ と y 軸によって囲まれた領域である．よって D を図示すれば下の図の影のついた部分のようになる．



ゆえに D は

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\, 0 \leqq x \leqq \sqrt{y}\}$$

とも表せるため, $\boxed{\mathbf{14}}$ の答えは ⓪, $\boxed{\mathbf{15}}$ の答えは ④ である.

このとき,

$$\int_0^{\sqrt{y}} x e^{y^2} dx = \left[\frac{x^2}{2} e^{y^2}\right]_0^{\sqrt{y}} = \frac{y}{2} e^{y^2}$$

だから $\boxed{\mathbf{16}}$ の答えは ③ である.

$t = y^2$ とおいて置換積分を行えば, $y dy = \dfrac{1}{2} dt$ で, y が 0 から 1 まで動くとき, t も 0 から 1 まで動くため

$$\int_0^1 \frac{y}{2} e^{y^2} dy = \int_0^1 \frac{1}{4} e^t dt = \left[\frac{1}{4} e^t\right]_0^1 = \frac{e-1}{4}$$

である. 従って $\boxed{\mathbf{17}}$ の答えは ① である.

第２分野　線形代数

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{18}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{33}}$ 〕

問 1　$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ であるとき，A の行列式は $|A| =$ $\boxed{\mathbf{18}}$ である．また，

A の逆行列 A^{-1} の $(4,4)$ 成分は $\boxed{\mathbf{19}}$ である．

$\boxed{\mathbf{18}}$ ・ $\boxed{\mathbf{19}}$ の解答群

⓪ -8	① -7	② -6	③ -5	④ -4	⑤ -3	⑥ -2
⑦ -1	⑧ 0	⑨ 1	ⓐ 2	ⓑ 3	ⓒ 4	ⓓ 5
ⓔ 6	ⓕ 7	ⓖ 8				

解説　A の行列式は，例えば

$$|A| = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{第 1 行と第 2 行を入れ替える}$$

$$= -(-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c}(1,1)\ \text{成分を前に出し行列のサイズを減らす} \\ \text{(第 1 行で余因子展開する)}\end{array}$$

$$= -(-1)(-1) \quad \text{サラスの方法で 3 次正方行列の行列式を計算する}$$

$$= -1$$

と計算できる．したがって $\boxed{\mathbf{18}}$ の答えは ⑦ である．(あるいは最後から 2 番目の等式でサラスの方法を使わず，第 3 行で展開し $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ と計算してもよい.)

A の行列式は 0 でないので逆行列 A^{-1} は存在する．A^{-1} の $(4,4)$ 成分は

$$\frac{1}{|A|}(A \text{ の } (4,4) \text{ 余因子}) = \frac{1}{|A|}(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{-1} \cdot 4 = -4$$

である．したがって $\boxed{\mathbf{19}}$ の答えは ④ である．

問 2　3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x - 2y - 4z = 1 \\ 2x - 3y - 7z = 3 \\ -x + 2z = a \end{cases}$$

について考える． ただし，a は定数である．

(1)　この連立方程式が解をもつのは，$a = \boxed{\mathbf{20}}$ のときである．

(2)　$a = \boxed{\mathbf{20}}$ のとき，連立方程式の解は，任意定数 t を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \boxed{\mathbf{21}} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{22}} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．

(3)　$a = \boxed{\mathbf{20}}$ のとき，係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

の階数と，拡大係数行列

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -7 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

の階数は等しく，$\boxed{\mathbf{23}}$ である．

$\boxed{\mathbf{20}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{23}}$ **の解答群**

⓪ -5　① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

⑥ 1　⑦ 2　⑧ 3　⑨ 4　ⓐ 5

解説　(1)　与えられた連立方程式

$$\begin{cases} x - 2y - 4z = 1 \\ 2x - 3y - 7z = 3 \\ -x + 2z = a \end{cases} \qquad \cdots\cdots \text{(L1)}$$

を変数消去の方法で解く．

まず第1式を使い第2式と第3式から x を消去する．(第2式$-2\times$第1式)，(第3式 + 第1式) のそれぞれを改めて第2式，第3式とした連立方程式は，

$$\begin{cases} x - 2y - 4z = 1 \\ y + z = 1 \\ -2y - 2z = a+1 \end{cases}$$

となる．続いて第2式を使い第3式から y を消去する．(第3式 $+ 2 \times$ 第2式) を改めて第3式とした連立方程式は，

$$\begin{cases} x - 2y - 4z = 1 \\ y + z = 1 \\ 0 = a+3 \end{cases} \qquad \cdots\cdots \text{(L2)}$$

となる．(今の場合，z も消去されてしまった．)

(L1) と (L2) は方程式としては同値である．すなわち，(L1) から (L2) が導かれたが，変形の逆をたどって (L2) から (L1) を導くことができる．したがって (L2) の解の存在を考えれば十分である．

連立方程式 (L2) が解を持つには，その第3式の等号が成り立たなければならないが，それは $a = -3$ のときである．さらに，a がこの値を取るとき，第1式と第2式の等号を成り立たせる解 x, y, z が存在する．例えば，$x = 3, y = 1, z = 0$．よって，$\boxed{\mathbf{20}}$ の答えは -3 で ②.

(参考 1) 連立方程式 (L1) から (L2) までの変形は，連立方程式の拡大係数行列に次のような行に関する基本変形を行ったことと本質的に同じある．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -7 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & a+1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+3 \end{pmatrix}$$

(参考 2) 与えられた連立方程式は行列を用いて

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \cdots\cdots \text{ (L3)}$$

と表される．ここで，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$$

である．

式 (L3) のような形で表された n 元連立 1 次方程式の解の存在に関する基本的事実を簡単に述べる．(L3) において A は次のような $m \times n$ の行列で，$\boldsymbol{b}$ は $m \times 1$ の定ベクトルとする．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

このとき解の存在を二つの場合に分けて考える．

(場合 1) $m = n$，すなわち A が正方行列で，$|A| \neq 0$ のとき．この場合は A の逆行列 A^{-1} が存在し，A^{-1} を (L3) の両辺にかけることにより解 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ が求められる．したがってこの場合には解は存在してただ一つ定まる．

(場合 2) $m = n$ で $|A| = 0$ であるか，または $m \neq n$ のとき．この場合は，解が存在しないか，あるいは解が無限に存在するという現象が生じる．ここで基本になるのが次の定理である．

(定理) 連立 1 次方程式 (L3) の解が存在するための必要十分条件は，係数行列 A の階数と拡大係数行列 $(A, \boldsymbol{b})$ の階数が等しいことである．

(2) $a = -3$ として連立方程式 (L2) を解く．今度は，第 2 式を使って第 1 式から y を消去する．(第 1 式 $-$ 2 $\times$ 第 2 式) を改めて第 1 式とすることより，

$$\begin{cases} x \phantom{{}+y} - 2z = 3 \\ \phantom{x-{}} y + z = 1 \\ \phantom{x-y+{}} 0 = 0 \end{cases} \qquad \cdots\cdots \text{ (L4)}$$

を得る．最初の 2 式を x, y に関する連立方程式と見なすと，直ちに解けて解

$$\begin{cases} x = 3 + 2z \\ y = 1 - z \end{cases}$$

を得る．z の値にかかわらず (L4) の x, y, z に

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2z \\ 1-z \\ z \end{pmatrix}$$

の右辺の各成分を代入すると各方程式が満たされるので，任意定数 z でパラメータづけられた解の族が得られたことになる．わかりやすくするため右辺の任意定数 z を t と書き改めると，解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots \text{(L5)}$$

となる．この解と問題文中の解の形とを比較すれば，$\boxed{\mathbf{21}}$ は ⑤，$\boxed{\mathbf{22}}$ は ⑦ であることがわかる．

(参考 3) 連立方程式 (L2) から (L4) への変形は，上で行った拡大係数行列の変形に続けてさらに次のような行に関する基本変形を行ったことに対応する．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

消去法による 1 次方程式の解法において，(L1) から (L2) までの変形を前進消去過程，(L2) から (L4) までの変形を後退代入過程と呼ばれる．

(参考 4) 解の表示 (L5) は，

$$\big(\text{非同次 1 次方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の一般解}\big)$$
$$= \big(A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の特殊解 (一つの解)}\big) + \big(\text{対応する同次方程式 } A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ の一般解}\big)$$

という公式に対応する．具体的に，$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \boxed{\mathbf{21}} \end{pmatrix}$ が方程式 (L1) の解になるのは，$\boxed{\mathbf{21}}$ が 0 のときであることが容易にわかる．次に，$t \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{22}} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が．対応する同次方程式，すな

わち，

$$\begin{cases} x - 2y - 4z = 0 \\ 2x - 3y - 7z = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases}$$

の解になるのは $\boxed{\mathbf{22}}$ が 2 のときである．このようにして $\boxed{\mathbf{21}}$，$\boxed{\mathbf{22}}$ を定めることもできる．

(3) $a = -3$ のとき，係数行列と拡大係数行列は上で行った基本変形によって，それぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と変形された．1 次独立な列ベクトルは 2 個なので，その階数はともに 2 である．したがって，$\boxed{\mathbf{23}}$ の答えは 2 で ⑦.

問 3 3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の 3 個のベクトル

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} c \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を考える．ただし，c は定数とする．

(1) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が 1 次従属 (線形従属) であるとき，$c =$ $\boxed{\mathbf{24}}$ である．

(2) $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をなすとき，$c =$ $\boxed{\mathbf{25}}$ である．

(3) $c =$ $\boxed{\mathbf{25}}$ の場合，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ は実数 α, β, γ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w}$$

と表すことができる．このとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ の内積は $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} =$ $\boxed{\mathbf{26}}$ であるから，$\alpha =$ $\boxed{\mathbf{27}}$ である．

$\boxed{\mathbf{24}}$ ・ $\boxed{\mathbf{25}}$ の解答群

⓪ -6　① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1　⑥ 0

⑦ 1　⑧ 2　⑨ 3　ⓐ 4　ⓑ 5　ⓒ 6

$\boxed{\mathbf{26}}$ ・ $\boxed{\mathbf{27}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ -1	⑥ $\sqrt{2}$	⑦ $-\sqrt{2}$	⑧ $\sqrt{3}$	⑨ $-\sqrt{3}$
ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	ⓑ $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	ⓒ $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	ⓓ $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	ⓔ $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$
ⓕ $-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$	ⓖ $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$	ⓗ $-\dfrac{2}{\sqrt{6}}$		

解説　(1)　その定義より，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が 1 次従属であるのは，少なくとも 1 つは 0 でない実数 (スカラー) k_1, k_2, k_3 について 1 次関係 (線形関係)

$$k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v} + k_3\boldsymbol{w} = \mathbf{0} \qquad \cdots\cdots \text{(L6)}$$

が成り立つことである，この式は縦ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を順に横に並べてできる正方行列 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ を用いて

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots \text{(L7)}$$

と簡単に表される．もし行列式 $\bigl|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\bigr|$ が $\neq 0$ ならば $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ の逆行列をかけて $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ が結論されてしまう．また，$\bigl|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\bigr| = 0$ のとき (L7) を満たす自明でない k_i がある．したがって，$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が 1 次従属であるための必要十分条件は $\bigl|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\bigr| = 0$ である．

$$\bigl|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\bigr| = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{c}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & c \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{5-c}{6}$$

であるから，$\bigl|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\bigr| = 0$ となるのは $c = 5$ のときである．よって $\boxed{\mathbf{24}}$ は ⓑ である．

行列式を使わないで次のように考えてもよい．(L6) を書き下すと，

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}k_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}k_2 + \dfrac{c}{\sqrt{6}}k_3 = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}k_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}k_2 - \dfrac{1}{\sqrt{6}}k_3 = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}k_1 \qquad\qquad + \dfrac{2}{\sqrt{6}}k_3 = 0 \end{cases}$$

である．変数を消去していくと上式は

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}k_1 & - & \dfrac{1}{\sqrt{2}}k_2 & + & \dfrac{c}{\sqrt{6}}k_3 & = & 0 \\ & & \dfrac{2}{\sqrt{2}}k_2 & - & \dfrac{c+1}{\sqrt{6}}k_3 & = & 0 \\ & & & & \dfrac{5-c}{\sqrt{6}}k_3 & = & 0 \end{cases}$$

と変形される．この式において，もし $k_3 = 0$ ならば $k_2 = k_1 = 0$ である．したがって $k_3 \neq 0$ でなければならない．このとき第 3 式より $\dfrac{5-c}{\sqrt{6}} = 0$ となり，$c = 5$ であることがわかる．

(2)　$\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ が $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をなす条件は，(i) 2 つの異なるベクトルが互いに直交し，(ii) 各ベクトルの長さが 1 であることである．

直交条件 (i) は,

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0, \qquad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 0, \qquad \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$$

である．最初の式 $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ は無条件で成り立っている．

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} c \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{6}} (c - 1 + 2) = \frac{c+1}{3\sqrt{2}} = 0$$

より $c = -1$ でなければならない．c がこの値をとるとき $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ も成り立つ．

さらに単位ベクトルの条件 (ii) は，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対してその長さを $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$ と書くと,

$$\|\boldsymbol{u}\| = 1, \quad \|\boldsymbol{v}\| = 1, \quad \|\boldsymbol{w}\| = 1$$

である．$c = -1$ のとき，この条件は自動的に満たされることが確認される．よって，$\boxed{\textbf{25}}$ は ⑤ である．

(3)　$c = -1$ で $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ は $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底をなすとする．与えられたベクトル $\boldsymbol{x}$ はこの基底に関して

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} + \gamma \boldsymbol{w} \qquad \cdots\cdots \text{(L8)}$$

と一意的に表される．内積を利用して係数 α を求めることが問題である．

まず，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ の内積は

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2 - 4 + 3) = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

である．したがって $\boxed{\mathbf{26}}$ は ⑨ である．

一方，(L8) の基底で表した式を使えば $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ の内積は，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} =&(\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}+\gamma\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{u}\\ =&\alpha\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+\beta\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}+\gamma\,\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}\\ =&\alpha\cdot 1+\beta\cdot 0+\gamma\cdot 0\\ =&\alpha\end{aligned}$$

となる． 以上の $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u}$ の二つの計算結果を等置して $\alpha=-\sqrt{3}$ を得る．よって $\boxed{\mathbf{27}}$ は ⑨.

(参考) $\mathbb{R}^3$ の 3 個のベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ が互いに直交し，各ベクトルの長さが 0 でなければ，この 3 個のベクトルは 1 次独立となり，したがって $\mathbb{R}^3$ の基底をなすことが，上の論法を適用すれば容易に証明される．

問 4 $A=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ とする．

(1) A の固有値は $\boxed{\mathbf{28}}$ と $\boxed{\mathbf{29}}$ である．ただし，$\boxed{\mathbf{28}} < \boxed{\mathbf{29}}$ とする．

(2) E を 2 次の単位行列，O を 2 次の零行列とする．実数 a,b が $a=\boxed{\mathbf{30}}$，$b=\boxed{\mathbf{31}}$ のとき，

$$A^2+aA+bE=O$$

が成り立つ．

(3) A^3 は実数 $c=\boxed{\mathbf{32}}$, $d=\boxed{\mathbf{33}}$ を用いて

$$A^3=cA+dE$$

と表すことができる．

$\boxed{\mathbf{28}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{33}}$ の解答群

⓪ -8	① -7	② -6	③ -5	④ -4	⑤ -3	⑥ -2
⑦ -1	⑧ 0	⑨ 1	ⓐ 2	ⓑ 3	ⓒ 4	ⓓ 5
ⓔ 6	ⓕ 7	ⓖ 8				

解説　(1)　A の特性方程式 (固有方程式) は,

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda+3 & -4 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-2)+4 = \lambda^2+\lambda-2 = 0$$

であるから，固有値は $\lambda = -2,\ 1$.　$\boxed{\mathbf{28}} < \boxed{\mathbf{29}}$ と指定されているので，答えは $\boxed{\mathbf{28}}$ が -2 で ⑥,　$\boxed{\mathbf{29}}$ が 1 で⑨.

(2)　ケイリー・ハミルトンの定理より A の固有多項式 $\Phi(\lambda) = |\lambda E - A|$ に対して $\Phi(A) = O$ が成り立つ．問題とする A については上の計算より $\Phi(\lambda) = \lambda^2+\lambda-2$ であるから,

$$\Phi(A) = A^2 + A - 2E = O\,.$$

よって $a = 1, b = -2$．したがって，$\boxed{\mathbf{30}}$ は ⑨,　$\boxed{\mathbf{31}}$ は ⑥.

(3)　ケイリー・ハミルトンの定理の応用として，与えられた λ の多項式 $f(\lambda)$ に対応する A の行列多項式 $f(A)$ の計算するには，$f(\lambda)$ を特性多項式 $\Phi(\lambda)$ で割ればよい．多項式の割り算をした結果を

$$f(\lambda) = p(\lambda)\,\Phi(\lambda) + q(\lambda) \qquad (\text{ただし，} q(\lambda) \text{ の次数} < \Phi(\lambda) \text{ の次数})$$

とするとき，$\Phi(A) = O$ であるから,

$$f(A) = p(A)\,\Phi(A) + q(A) = q(A)$$

であり，$f(A)$ の計算が簡単化される．

今の問題では，λ^3 を $\Phi(\lambda) = \lambda^2+\lambda-2$ で割ると

$$\lambda^3 = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) + 3\lambda - 2$$

あるから

$$A^3 = 3A - 2E$$

を得る．したがって $c = 3, d = -2$ であり，答は $\boxed{\mathbf{32}}$ が ⓑ,　$\boxed{\mathbf{33}}$ が ⑥.

第3分野　常微分方程式

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{34}$ 〜 $\boxed{46}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

問 1　初期値問題

$$y' + 2y = -2, \qquad y(0) = a$$

の解 y について考える.

(1)　解が定数関数 $y = a$ となるのは $a = \boxed{34}$ のときである.

(2)　$a = -\dfrac{1}{2}$ のとき，$y = \boxed{35}$ である.

$\boxed{34}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ -1
⑥ -2	⑦ -3	⑧ -4			

$\boxed{35}$ の解答群

⓪ $-\dfrac{1}{2}e^{2x}$	① $-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$	② $-1 + \dfrac{1}{2}e^{2x}$
③ $-1 + \dfrac{1}{2}e^{-2x}$	④ $-\dfrac{1}{2}\cos x$	⑤ $-\dfrac{1}{2}e^{x}\cos x$
⑥ $-\dfrac{1}{2}e^{-x}\cos x$		

解説　(1)　$y = a$ を微分方程式 $y' + 2y = -2$ に代入すれば, $2a = -2$ となり, $a = -1$ を得るので, $\boxed{34}$ の答えは ⑤ である.

(2)　まず, 同次方程式 $z' + 2z = 0$ を考える. これは定数係数線形方程式であるから, 特性方程式 $\lambda + 2 = 0$ の根 $\lambda = -2$ を利用すれば容易に一般解 $z = Ce^{-2x}$ (C は任意定数)

を得ることができる. 次に, 前問 (1) において非同次方程式 $y' + 2y = -2$ の特殊解 $y = -1$ が求まっているので, その方程式の一般解は

$$y = -1 + z = -1 + Ce^{-2x}$$

である. 初期条件 $y(0) = -\frac{1}{2}$ を満たすように C を定めると $C = \frac{1}{2}$ となるので, **35** の答えは ③ である.

なお, **35** の答えの求め方には上記の方法以外にも複数の方法がある. 例えば, 変数分離法, 定数変化法, 1 階線形方程式の解の公式を使う方法, 初めから $z = y + 1$ と置く方法などが挙げられる.

問 2　初期値問題

$$y'' + 2y' + by = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

の解 y について考える．ただし，b は定数である．

(1)　$b = 2$ のとき，$y =$ **36** である．

(2)　$b =$ **37** のとき，$y = xe^{-x}$ である．

(3)　$b =$ **38** のとき，$\lim_{x\to\infty} y(x) = \frac{1}{2}$ である．

36 の解答群

⓪ x	① e^x	② e^{-x}	③ $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$
④ $x\cos x$	⑤ $e^x \sin x$	⑥ $e^{-x}\sin x$	

37 ・ 38 の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4
⑤ -1	⑥ -2	⑦ -3	⑧ -4	

解説　(1)　微分方程式 $y'' + 2y' + 2y = 0$ の一般解は, 特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ の根が $\lambda = -1 \pm i$ であることより,

$$y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

と表される．初期条件により

$$y(0) = C_1 = 0, \quad y'(0) = -C_1 + C_2 = 1$$

となるので, $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ を得る．したがって $\boxed{\mathbf{36}}$ の答えは ⑥ である．

(2) 微分方程式 $y'' + 2y' + by = 0$ の特殊解が x と指数関数の積の形になり得るのは, 特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + b = 0$ が重解をもつとき, すなわち $b = 1$ のときである．事実, $y = xe^{-x}$ を $y'' + 2y' + by = 0$ に代入すると $b = 1$ であることが確かめられる．したがって $\boxed{\mathbf{37}}$ の答えは ① である．

(3) 微分方程式 $y'' + 2y' + by = 0$ に対する特性方程式 $\lambda^2 + 2\lambda + b = 0$ の根は $\lambda = -1 \pm \sqrt{1-b}$ である．
$b > 1$ のとき, y は e^{-x} と三角関数の積の形になるので, $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$ である．
$b = 1$ のとき, 前問 (2) より $\lim_{x \to \infty} y(x) = \lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$ である．
$b < 1$ のとき, y は $C_1 e^{(-1+\sqrt{1-b})x} + C_2 e^{(-1-\sqrt{1-b})x}$ の形となる．それが $x \to \infty$ のときに 0 でない定数に近づくのは $b = 0$ の場合のみである．事実, $b = 0$ のとき, 初期値問題の解は $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}e^{-2x}$ であり, $\lim_{x \to \infty} y(x) = \dfrac{1}{2}$ である．したがって $\boxed{\mathbf{38}}$ の答えは ⓪ である．

問 3 微分方程式

$$(*) \qquad y'' + p^2 y = 2\cos 3x$$

について考える． ただし，p は正の定数である．

(1) $(*)$ に対応する同次方程式 $y'' + p^2 y = 0$ の一般解は $y = \boxed{\mathbf{39}}$ である．

(2) $p \neq \boxed{\mathbf{40}}$ のとき，$(*)$ の一般解は定数 A を用いて $y = \boxed{\mathbf{39}} + A\cos 3x$ と表すことができる．A は p を用いて $A = \boxed{\mathbf{41}}$ と表される．

(3) $p = \boxed{\mathbf{40}}$ のとき，$(*)$ の 一般解は $y = \boxed{\mathbf{39}} + \boxed{\mathbf{42}}\, x\sin 3x$ である．

$\boxed{\mathbf{39}}$ **の解答群**

⓪ $C_1 e^{p} + C_2 e^{-p}$　　① $C_1 e^{px} + C_2 e^{-px}$

② $C_1 e^{p^2 x} + C_2 e^{-p^2 x}$　　③ $C_1 \cos p + C_2 \sin p$

④ $C_1 \cos px + C_2 \sin px$　　⑤ $C_1 \cos p^2 x + C_2 \sin p^2 x$

$(C_1, C_2$ は任意定数)

$\boxed{40}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{9}$　① $\dfrac{1}{6}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

⑥ 3　⑦ 6　⑧ 9

$\boxed{41}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{2}{p^2}$　① $\dfrac{2}{p^2-1}$　② $\dfrac{2}{p^2+1}$　③ $\dfrac{2}{p^2-3}$

④ $\dfrac{2}{p^2+3}$　⑤ $\dfrac{2}{p^2-9}$　⑥ $\dfrac{2}{p^2+9}$

$\boxed{42}$ **の解答群**

⓪ $\dfrac{1}{9}$　① $\dfrac{1}{6}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$

④ 2　⑤ 3　⑥ 6　⑦ 9

解説　(1)　同次方程式 $y'' + p^2y = 0$ に対する特性方程式 $\lambda^2 + p^2 = 0$ の根は $\lambda = \pm pi$ であるから, 一般解は

$$y = C_1 \cos px + C_2 \sin px$$

である．したがって $\boxed{39}$ の答えは ④ である．

(2)　$(*)$ の y に $A\cos 3x$ を代入すると

$$-9A\cos 3x + p^2 A\cos 3x = 2\cos 3x$$

となるので, $(p^2-9)A = 2$ を得る．$p^2 - 9 \neq 0$, すなわち $p \neq 3$ のとき, A は p で表すことができ, $A = \dfrac{2}{p^2-9}$ となる．したがって $\boxed{40}$ の答えは ⑥ であり, $\boxed{41}$ の答えは ⑤ である．

(3)　$p = 3$ とした $(*)$ の y に $Bx\sin 3x$ (B は定数) を代入すると $6B\cos 3x = 2\cos 3x$ となり, $B = \dfrac{1}{3}$ を得るので, $\boxed{42}$ の答えは ② である．

問 4　質点が速さの 2 乗に比例した抵抗力を受けながら x 軸上を正の向きに運動している．時刻 t での質点の速度を $v(t)$ とすると, v は微分方程式

(a)　$$\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

を満たす．ここで k は正の定数とする．また，以下では $t \geqq 0$ とする．

まず，質点の初速度を $v(0) = V$ (ただし，$V > 0$) として方程式 (a) を解くと

(b) $\quad v(t) = \boxed{\mathbf{43}}$

となる．したがって，$v(t)$ が $\dfrac{V}{2}$ に等しくなる時刻は $t = \boxed{\mathbf{44}}$ である．

次に，時刻 t での質点の位置を $x(t)$ とする．微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = \boxed{\mathbf{43}}$ を初期条件 $x(0) = 0$ のもとで解くと

(c) $\quad x(t) = \boxed{\mathbf{45}}$

を得る．(b) と (c) から t を消去すると，v は x の関数として $v = \boxed{\mathbf{46}}$ と表すことができる．

$\boxed{43}$ の解答群

⓪ Ve^{-kt}　① Ve^{-kVt}　② $\dfrac{V}{kt+1}$

③ $\dfrac{V}{kVt+1}$　④ $\dfrac{V}{2kVt+1}$　⑤ $V\left(1 - \dfrac{3kt}{V^3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\boxed{44}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{k}$　① $\dfrac{1}{kV}$　② $\dfrac{1}{2kV}$　③ $\dfrac{\log 2}{k}$

④ $\dfrac{\log 2}{kV}$　⑤ $\dfrac{7V^3}{24k}$

$\boxed{45}$ の解答群

⓪ $\dfrac{V}{k}(1 - e^{-kt})$　① $kV(1 - e^{-kt})$　② $\dfrac{1}{k}(1 - e^{-kVt})$

③ $kV^2(1 - e^{-kVt})$　④ $\dfrac{1}{k}\log(kVt + 1)$　⑤ $\dfrac{V}{k}\log(kt + 1)$

46 **の解答群**

⓪ Ve^{-kx}　① Ve^{-kVx}　② $V-kx$

③ $V-kVx$　④ $V\left(1-\dfrac{2kx}{V^4}\right)^{\frac{1}{4}}$　⑤ $V\left(1-\dfrac{4kx}{V^4}\right)^{\frac{1}{4}}$

解説　微分方程式 (a) は $-v^{-2}dv = kdt$ と書き直すことができる変数分離形で, その両辺を積分することにより,

$$v^{-1} + C = kt \quad (C \text{ は積分定数})$$

を得る. $v(0) = V$ を満たすように C を決めれば,

$$v^{-1} - V^{-1} = kt \quad \text{すなわち} \quad v = \frac{1}{kt + V^{-1}} = \frac{V}{kVt+1}$$

となる. したがって $\boxed{\mathbf{43}}$ の答えは ③ である.

$v(t) = \dfrac{V}{2}$ となるのは $kVt+1 = 2$ のとき, すなわち $t = \dfrac{1}{kV}$ のときであるから, $\boxed{\mathbf{44}}$ の答えは ① である.

微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{V}{kVt+1}$ を解くには, 単に右辺を t で積分すればよい.

$$x = \int \frac{V}{kVt+1}\,dt = \frac{1}{k}\log(kVt+1) + C$$

となるが, 初期条件 $x(0) = 0$ より $C = 0$ となるから, $\boxed{\mathbf{45}}$ の答えは ④ である.

(b) と (c) はそれぞれ

$$kVt + 1 = \frac{V}{v}, \quad kVt+1 = e^{kx}$$

と変形できるので, $\dfrac{V}{v} = e^{kx}$ すなわち $v = Ve^{-kx}$ を得る. したがって $\boxed{\mathbf{46}}$ の答えは ⓪ である.

v と x の関係式 $v = Ve^{-kx}$ は微分方程式 $\dfrac{dv}{dx} = -kv$ を満たす. この方程式は

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{dx} = -kv^2\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = -kv^2\frac{1}{v} = -kv$$

のように (a) から直接導くこともできる.

第4分野　確率・統計

〔問1〜問4：解答番号 $\boxed{47}$ 〜 $\boxed{66}$〕

(注意) $P(A)$ は事象 A の起こる確率を表す.

問1　(1)　確率変数 X の確率分布が

X の値	2	3	4
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	c

(c は定数とする)

で与えられている．このとき $c=$ $\boxed{47}$ で，X の期待値は $E(X)=$ $\boxed{48}$ である.

$\boxed{47}$ ・ $\boxed{48}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{4}{11}$　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{7}{13}$

⑥ $\frac{4}{9}$　⑦ $\frac{5}{9}$　⑧ $\frac{7}{9}$　⑨ $\frac{13}{6}$　ⓐ $\frac{19}{6}$　ⓑ $\frac{11}{3}$

解説　(1)　$P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$ から,

$$c=P(X=4)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}.$$

となるので，$\boxed{47}$ の答えは ④ である．また期待値は

$$E(X)=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{5}{12}=\frac{19}{6}.$$

であるから，$\boxed{48}$ の答えは ⓐ である.

(2)　確率変数 X の期待値が $E(X)=2$，分散が $V(X)=1$ であるとき，$E(X^2)=$ $\boxed{49}$ である.

49 の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

解説　(2)

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

から

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 1 + 2^2 = 5.$$

従って $\boxed{\mathbf{49}}$ の答えは ⑤ である．

(3)　1 から 6 までのすべての目が $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るさいころを全部で 30 回投げたときに，1 または 2 の目が出た回数を X とする．このとき X の期待値は $E(X) = \boxed{\mathbf{50}}$ である．

50 の解答群

⓪ 5　① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

⑥ 12　⑦ 15　⑧ $\dfrac{10}{3}$　⑨ $\dfrac{20}{3}$　ⓐ $\dfrac{10}{9}$　ⓑ $\dfrac{20}{9}$

解説　(3)　このさいころを投げて 1 または 2 の目が出る確率は $\dfrac{1}{3}$ であるから，X は 2 項分布 $B\left(30, \dfrac{1}{3}\right)$ $(n = 30, p = \dfrac{1}{3})$ に従う．従って平均は $np = \dfrac{30}{3} = 10$ であるから $\boxed{\mathbf{50}}$ の答えは ⑤ である．このことは大ざっぱに言って，1 回さいころを投げたときに $\dfrac{1}{3}$ の確率で起こる事象が，30 回さいころを投げたとき全部で 10 回起こることが期待できることを意味している．ちなみに X の分散は $np(1-p) = 30 \times \dfrac{1}{3} \times (1 - \dfrac{1}{3}) = \dfrac{20}{3}$ である．

(4)　0 以上の値をとる確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}, \quad x \geqq 0$$

で与えられているとき，分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ は

$$F(x) = \boxed{\mathbf{51}}, \quad x \geqq 0$$

となるから，$P(1 < X \leqq 2) = \boxed{\mathbf{52}}$ である．

$\boxed{\mathbf{51}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{x+1}$　③ $\dfrac{x}{x+1}$

④ $\dfrac{2}{x+1}$　⑤ $\dfrac{-1}{x+1}$　⑥ $\dfrac{-2}{(x+1)^3}$

$\boxed{\mathbf{52}}$ の解答群

⓪ 0　① $\dfrac{1}{6}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\dfrac{5}{9}$

⑤ $\dfrac{2}{3}$　⑥ $\dfrac{7}{9}$　⑦ 1

解説　(4)　分布関数と確率密度関数の関係から，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} \frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{x}{x+1}, \quad x \geqq 0.$$

従って $\boxed{\mathbf{51}}$ の答えは③ である．また，

$$P(1 < X \leqq 2) = F(2) - F(1) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

であるから $\boxed{\mathbf{52}}$ の答えは① である．これは，確率密度関数を用いて，

$$P(1 < X \leqq 2) = \int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{1}^{2} \frac{1}{(x+1)^2}dx = \frac{1}{6}$$

としてもよい．

問 2　確率変数 X, Y は，

$$(*) \qquad \begin{cases} P(X=1, Y=1) = \dfrac{1}{9}, \quad P(X=1, Y=2) = \dfrac{2}{9}, \\[2ex] P(X=2, Y=1) = \dfrac{4}{9}, \quad P(X=2, Y=2) = \dfrac{2}{9} \end{cases}$$

を満たすとする．このとき，$P(X=1)=$ $\boxed{\mathbf{53}}$ である．また，$P(Y=1)=$ $\boxed{\mathbf{54}}$ である．これらと $(*)$ から，X と Y は $\boxed{\mathbf{55}}$ ．

$\boxed{\mathbf{53}}$ ・ $\boxed{\mathbf{54}}$ の解答群

⓪ 0　① $\frac{1}{9}$　② $\frac{2}{9}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{4}{9}$

⑤ $\frac{5}{9}$　⑥ $\frac{2}{3}$　⑦ $\frac{7}{9}$　⑧ $\frac{8}{9}$　⑨ 1

$\boxed{\mathbf{55}}$ の解答群

⓪ 独立である　① 従属である（独立でない）

② 独立であるとも従属であるともいえない

解説

$$P(X=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}.$$

より $\boxed{\mathbf{53}}$ の答えは ③ である．同様に，

$$P(Y=1)=P(X=1,Y=1)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

であるから $\boxed{\mathbf{54}}$ の答えは ⑤ である．またこれらから

$$P(X=1,Y=1)\neq P(X=1)P(Y=1)$$

である．X と Y が独立であるとは，

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1),\quad P(X=1,Y=2)=P(X=1)P(Y=2),$$
$$P(X=2,Y=1)=P(X=2)P(Y=1),\quad P(X=2,Y=2)=P(X=2)P(Y=2)$$

が すべて 成り立つことであるから，独立ではないことがわかる．従って $\boxed{\mathbf{55}}$ の答えは ① である．

問 3　ある工場では 2 つの機械 α,β を使用して，同じ製品を作っている． それぞれの機械で全体の 60%, 40% の製品を作っており，α で生産される製品が不良品である確率は

$\frac{1}{100}$, β で生産される製品が不良品である確率は $\frac{1}{200}$ であるという．

いま，任意に取り出した製品が α で作られた製品である事象を A, β で作られた製品である事象を B で表す．また，任意に取り出した製品が不良品である事象を F で表す．このとき，α で生産される製品が不良品である確率は事象 A が起こったときの事象 F の起こる条件付き確率 $P(F|A)$ で表されるので，$P(F|A) = \frac{1}{100}$ である．同様に β で生産される製品が不良品である確率は $P(F|B) = \frac{1}{200}$ であるから，

$$P(A \cap F) = \boxed{\mathbf{56}}, \quad P(B \cap F) = \boxed{\mathbf{57}}, \quad P(F) = \boxed{\mathbf{58}}$$

となる．したがって，１つの製品が不良品であるとき，これが機械 α により作られたものである条件付き確率 $P(A|F)$ は $\boxed{\mathbf{59}}$ となる．

$\boxed{56}$ ・ $\boxed{57}$ ・ $\boxed{58}$ の解答群

⓪ 0　① 0.001　② 0.002　③ 0.003　④ 0.004

⑤ 0.005　⑥ 0.006　⑦ 0.007　⑧ 0.008　⑨ 0.01

$\boxed{59}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{1}{3}$　⑥ $\frac{2}{3}$

解説　条件付き確率の定義から，

$$P(F|A) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)}$$

で，題意から $P(F|A) = \frac{1}{100}$, $P(A) = 0.6$ であるから，$P(A \cap F) = 0.006$ である．したがって $\boxed{\mathbf{56}}$ の答えは ⑥ である．同様に

$$P(F|B) = \frac{P(B \cap F)}{P(B)}$$

で，題意から $P(F|B) = \frac{1}{200}$, $P(B) = 0.4$ であるから，$P(B \cap F) = 0.002$ である．したがって，$\boxed{\mathbf{57}}$ の答えは② である．またこれらから，$P(F) = P(A \cap F) + P(B \cap F) = 0.008$ を得る．したがって $\boxed{\mathbf{58}}$ の答えは ⑧ である．

最後に，条件付き確率の定義から，

$$P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{0.006}{0.008} = \frac{3}{4}.$$

したがって $\boxed{\textbf{59}}$ の答えは ④ である．

問 4 同じ親魚から同時に生まれた多くの稚魚を１年間非常に大きな池で同じ条件で育てた．１年後に稚魚を無作為に $n = 100$ 匹捕獲し，これらの体長（標本）を $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とする．いま，実際に捕獲したところ，

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{100}) = (78, 95, \ldots, 105) \quad \text{単位：mm}$$

で，$\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \dfrac{1}{100}(78 + 95 + \cdots + 105) = 93.0$ となっていた．

過去の経験から，同じ親魚から同時に生まれた稚魚の１年後の体長は母平均 μ, 母分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従っているとする．昨年までの母平均は 95 に等しい．一方，母分散は変化がなく $\sigma^2 = 12^2$ であるとわかっている．

このとき，今年の母平均の変化を調べるために母平均 μ に対する両側検定を行うことにし，$\mu_0 = 95$ として

帰無仮説 H_0 : $\mu = \mu_0$,

対立仮説 H_1 : $\mu \neq \mu_0$

と設定する．

ここで $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ とおくと，$\overline{X}$ は平均 $\boxed{\textbf{60}}$, 分散 $\boxed{\textbf{61}}$ の正規分布に従うので，H_0 のもとで

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

は平均 0, 分散 1 の標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．正規分布表から

$$P(-1.65 < Z < 1.65) = 0.9$$

となるので，$1.65 \times \dfrac{12}{\sqrt{100}} = 1.98$ に注意すると，これから，

$$P\left(|\overline{X} - 95| \geqq 1.98\right) = \boxed{\textbf{62}}$$

がわかる．これに対して標本平均値 $\overline{x}$ は

$$|\overline{x} - 95| = 2.0 > 1.98$$

を満たすから，有意水準 $\boxed{\mathbf{63}}$ ％で H_0 は $\boxed{\mathbf{64}}$.

また，

$$P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$$

を用いて，同様の議論を行うと，H_0 は有意水準 $\boxed{\mathbf{65}}$ ％で $\boxed{\mathbf{66}}$.

$\boxed{60}$ ・ $\boxed{61}$ の解答群

⓪ μ　① $n\mu$　② $\dfrac{\mu}{n}$　③ σ　④ $n\sigma$

⑤ σ^2　⑥ $n\sigma^2$　⑦ $n^2\sigma^2$　⑧ $\dfrac{\sigma^2}{n}$　⑨ $\dfrac{\sigma^2}{n^2}$

$\boxed{62}$ ・ $\boxed{63}$ ・ $\boxed{65}$ の解答群

⓪ 0.05　① 0.1　② 0.9　③ 0.95　④ 2.5

⑤ 5　⑥ 10　⑦ 90　⑧ 95　⑨ 97.5

$\boxed{64}$ ・ $\boxed{66}$ の解答群

⓪ 棄却される　① 棄却されない

解説　一般に $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立ですべて正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数であるとき，$\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ は平均 μ で分散が $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布に従う．

しかし，このことを知らなくても，$\overline{X}$ の平均と分散の値は期待値の基本性質から求めることができる．すなわち，

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mu \\ &= \mu. \end{aligned}$$

独立性を用いると，

$$\begin{aligned}V(\overline{X}) &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sigma^2\\ &= \frac{\sigma^2}{n}.\end{aligned}$$

以上より $\boxed{\mathbf{60}}$ の答えは ⓪，$\boxed{\mathbf{61}}$ の答えは ⑧ である．

次に帰無仮説 H_0 のもとで

$$\begin{aligned}&-1.65 < Z < 1.65\\ \Longleftrightarrow & -1.65 < \frac{\overline{X}-95}{12/\sqrt{100}} < 1.65\\ \Longleftrightarrow & -1.65 \times \frac{12}{\sqrt{100}} < \overline{X}-95 < 1.65 \times \frac{12}{\sqrt{100}}\\ \Longleftrightarrow & |\overline{X}-95| < 1.65 \times \frac{12}{\sqrt{100}}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}P(|\overline{X}-95| \geqq 1.98) =& 1 - P(|\overline{X}-95|| < 1.98)\\ =& 1 - P(-1.65 < Z < 1.65) = 1 - 0.9 = 0.1\end{aligned}$$

従って $\boxed{\mathbf{62}}$ の答えは ① である．いま実際の標本値について，$|\overline{x}-95| = 2.0$ であるから，帰無仮説 H_0 のもとでは 0.1 の確率で起こる事象が実際の標本値については成り立っていることを意味している．このことから，有意水準 10% で H_0 を棄却し H_1 が成り立っているものと判断する．従って $\boxed{\mathbf{63}}$ の答えは ⑥ であり，$\boxed{\mathbf{64}}$ の答えは ⓪ である．

次に，$P(-1.65 < Z < 1.65) = 0.9$ の代わりに $P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$ を用いて同様な議論を行うと，$1.96 \times \frac{12}{\sqrt{100}} = 2.352$ から，

$$P(|\overline{X}-95| < 2.352) = 0.95$$

となる．実際の標本値について $|\overline{x}-95| = 2.0$ であるから，帰無仮説 H_0 のもとでは 0.95 の確率で起こる事象が実際の標本値について成り立っていることを意味している．このことから，有意水準 5% では H_0 を棄却することができない．従って $\boxed{\mathbf{65}}$ の答えは ⑤ であり，$\boxed{\mathbf{66}}$ の答えは ① である．