EMaT

工学系数学統一試験

Engineering Mathematics Test

2025 年 12 月 13 日（土）
4 分野受験 午後 1 時 30 分 〜 午後 4 時 10 分
3 分野受験 午後 1 時 30 分 〜 午後 3 時 30 分
2 分野受験 午後 1 時 30 分 〜 午後 2 時 50 分
1 分野受験 午後 1 時 30 分 〜 午後 2 時 10 分

＊ 受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．

(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．

(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．

(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．

(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．

(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．

(8) 問題冊子は持ち帰ること．

(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．

(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば， $\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合， $\boxed{\mathbf{23}}$ は（$\boxed{\mathbf{23}}$）という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，x^2- $\boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

(6) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{17}}$ 〕

問１ (1) 次の 3 つの極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}=\boxed{\mathbf{1}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-x}{x^2}=\boxed{\mathbf{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\boxed{\mathbf{3}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{3}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ e
	⑤ $\frac{1}{2}$	⑥ $\frac{1}{3}$	⑦ $\frac{1}{6}$	⑧ $\frac{1}{e}$
	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3	ⓒ $-e$
	ⓓ $-\frac{1}{2}$	ⓔ $-\frac{1}{3}$	ⓕ $-\frac{1}{6}$	ⓖ $-\frac{1}{e}$

(2)　n を自然数とする．定数 a_k $(k=1,2,3,\ldots,n)$ に対して

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_{n-1}x^{n-1}-a_nx^n}{x^{n+1}}$$

が（有限な）極限値をもつのは $a_k=$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $(k=1,2,3,\ldots,n)$ のときである．

$\boxed{\mathbf{4}}$ の解答群

⓪ k	① $\dfrac{1}{k}$	② $k!$	③ $\dfrac{1}{k!}$
④ $(-1)^k k$	⑤ $\dfrac{(-1)^k}{k}$	⑥ $(-1)^k k!$	⑦ $\dfrac{(-1)^k}{k!}$
⑧ $(-1)^{k-1} k$	⑨ $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$	ⓐ $(-1)^{k-1} k!$	ⓑ $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k!}$

問 2　広義積分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

を考える．

まず，半角の公式より，$2\cos^2\theta = \boxed{\mathbf{5}}$ であるから

$$(*) \qquad \int 2\cos^2\theta\,d\theta = \boxed{\mathbf{6}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である．

次に，$\sqrt{1-x} = \sin\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\frac{dx}{d\theta} = \boxed{\mathbf{7}}$ であり，x と θ の対応は以下のようになる．

x	$0 \to 1-\varepsilon$
θ	$\frac{\pi}{2} \to \boxed{\mathbf{8}}$

よって，$(*)$ を用いると

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\boxed{\mathbf{8}}} \frac{|\cos\theta|}{\sin\theta} \boxed{\mathbf{7}}\,d\theta = \boxed{\mathbf{9}}$$

となる．

$\boxed{5}$ ～ $\boxed{7}$ の解答群

⓪ $1+\cos 2\theta$ ① $1-\cos 2\theta$ ② $1+\sin 2\theta$

③ $1-\sin 2\theta$ ④ $1-2\cos^2\theta$ ⑤ $\theta+2\cos 2\theta$

⑥ $\theta+2\sin 2\theta$ ⑦ $\theta+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta$ ⑧ $\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$

⑨ $\cos 2\theta-1$ ⓐ $\sin 2\theta-1$ ⓑ $2\cos^2\theta-1$

ⓒ $2\cos\theta\sin\theta$ ⓓ $-2\cos\theta\sin\theta$

$\boxed{8}$ ・ $\boxed{9}$ の解答群

⓪ $\sin^{-1}\varepsilon$ ① $\sin^{-1}\sqrt{\varepsilon}$ ② $\sin^{-1}(1-\varepsilon)$

③ $\sin^{-1}\sqrt{1-\varepsilon}$ ④ $\dfrac{1}{\sin\varepsilon}$ ⑤ $\dfrac{1}{\sin\sqrt{\varepsilon}}$

⑥ $\dfrac{1}{\sin(1-\varepsilon)}$ ⑦ $\dfrac{1}{\sin\sqrt{1-\varepsilon}}$ ⑧ 0

⑨ 1 ⓐ π ⓑ 2π

ⓒ $\dfrac{\pi}{2}$ ⓓ $\dfrac{\pi}{4}$

問 3　関数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad ((x,y) \neq (0,0))$ を考える．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boxed{\textbf{10}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \boxed{\textbf{11}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \boxed{\textbf{12}}$$

である．また，関数 $f(x,y)$ は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boxed{\textbf{13}}$$

を満たす．

$\boxed{\textbf{10}}$ ～ $\boxed{\textbf{12}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$　① $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$　② $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

③ $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　④ $-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　⑤ $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

⑥ $\dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　⑦ $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　⑧ $-\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

⑨ $\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　ⓐ $-\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$　ⓑ $\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

ⓒ $-\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$　ⓓ $\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$　ⓔ $-\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

ⓕ $\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$　ⓖ $-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\boxed{\textbf{13}}$ の解答群

⓪ 0　① f　② $\dfrac{1}{f}$　③ $\sqrt{f}$　④ $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$

⑤ $-f$　⑥ $-\dfrac{1}{f}$　⑦ $-\sqrt{f}$　⑧ $-\dfrac{1}{\sqrt{f}}$

計算用紙

問 4　重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dxdy$ の値を求める．ここで D は xy 平面内の集合

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 1\}$$

である．積分順序を交換すると

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx\right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\boxed{14}}^{\boxed{15}} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dy\right) dx\end{aligned}$$

である．よって

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dxdy = \int_0^1 \boxed{16}\,dx = \boxed{17}$$

である．

$\boxed{14}$ ・ $\boxed{15}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ x　④ y　⑤ $1-x$　⑥ $1-y$

$\boxed{16}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$　① $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$　② $\dfrac{1-x}{(1+x^2)^2}$　③ $\dfrac{y}{(1+x^2)^2}$

④ $\dfrac{1-y}{(1+x^2)^2}$　⑤ $\dfrac{1}{(1+x^2)^3}$　⑥ $\dfrac{x}{(1+x^2)^3}$　⑦ $\dfrac{1-x}{(1+x^2)^3}$

⑧ $\dfrac{y}{(1+x^2)^3}$　⑨ $\dfrac{1-y}{(1+x^2)^3}$

$\boxed{17}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{3}{4}$　④ $\dfrac{3}{8}$　⑤ $\dfrac{3}{16}$

⑥ -1　⑦ $-\dfrac{1}{2}$　⑧ $-\dfrac{3}{4}$　⑨ $-\dfrac{3}{8}$　ⓐ $-\dfrac{3}{16}$

ⓑ y　ⓒ $\dfrac{y}{2}$　ⓓ $\dfrac{3y}{4}$　ⓔ $\dfrac{3y}{8}$　ⓕ $\dfrac{3y}{16}$

計算用紙

第２分野　線形代数

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{18}}$ 〜 $\boxed{\textbf{35}}$ 〕

(注意) 行列 A に対し，$\mathrm{rank}\, A$ は A の階数（ランク）を表す.

問 1 (1) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\textbf{18}}$ である.

(2) 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．このとき行列式 $|B|$ の値は $\boxed{\textbf{19}}$ である．よって B は逆行列をもつ.
逆行列 B^{-1} の $(1,4)$ 成分は $\boxed{\textbf{20}}$ である.

$\boxed{\textbf{18}}$ 〜 $\boxed{\textbf{20}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8

⑨ −1　ⓐ −2　ⓑ −3　ⓒ −4　ⓓ −5　ⓔ −6　ⓕ −7　ⓖ −8

計算用紙

問 2　座標空間内に 4 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(3,-1,1)$, $\mathrm{B}(-1,2,2)$, $\mathrm{C}(-4,-7,t)$ がある．ただし，t は実数とする．また，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

(1)　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が 1 次従属（線形従属）になるのは $t=$ $\boxed{\mathbf{21}}$ のときである．このとき $\boldsymbol{c}=$ $\boxed{\mathbf{22}}$ $\boldsymbol{a}+$ $\boxed{\mathbf{23}}$ $\boldsymbol{b}$ と表すことができる．

(2)　$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の両方と直交するのは $t=$ $\boxed{\mathbf{24}}$ のときである．

(3)　3 点 O, A, B を通る平面を α とする．平面 α 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ で表すと，$\boxed{\mathbf{25}}$ が成り立つ．

$\boxed{21}$ 〜 $\boxed{24}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

ⓓ -9　ⓔ -11　ⓕ -13　ⓖ -15

$\boxed{25}$ の解答群

⓪ $x+2y+5z=0$　① $x+2y-5z=0$

② $-x+2y+2z=0$　③ $-x+2y-7z=0$

④ $3x-y+z=0$　⑤ $3x-y-4z=0$

⑥ $-4x-7y+z=0$　⑦ $-4x-7y-z=0$

⑧ $-4x-7y+5z=0$　⑨ $-4x-7y-5z=0$

ⓐ $-4x-7y+13z=0$　ⓑ $-4x-7y-13z=0$

計算用紙

問 3　2 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ における線形変換について考える．

(1)　2 次正方行列 M が

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

をすべてのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ について満たすとする．このとき $M =$ $\boxed{\mathbf{26}}$ である．また，行列 M が表す線形変換は，xy 平面における x 軸に関する対称移動である．

(2)　$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対して

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおく．この行列が表す線形変換は，xy 平面における原点を中心とする角 θ の回転である．ただし，反時計回りを正とする．このとき

$$R_\theta M R_{-\theta} = \boxed{\mathbf{27}}$$

がすべての θ について成り立つ．また，行列 $\boxed{\mathbf{27}}$ が表す線形変換は，原点を中心とする回転と x 軸に関する対称移動の合成であることに注意すると，xy 平面における $\boxed{\mathbf{28}}$ であることがわかる．

$\boxed{\mathbf{26}}$ **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

⑥ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　⑧ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

27 の解答群

⓪ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ① $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ③ $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ ⑤ $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$

⑥ $\begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$ ⑦ $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

28 の解答群

⓪ 原点を中心とする角 θ の回転

① 原点を中心とする角 $-\theta$ の回転

② 原点を中心とする角 2θ の回転

③ 原点を中心とする角 -2θ の回転

④ 直線 $y = (\tan\theta)x$ に関する対称移動

⑤ 直線 $y = -(\tan\theta)x$ に関する対称移動

⑥ 直線 $y = (\tan 2\theta)x$ に関する対称移動

⑦ 直線 $y = -(\tan 2\theta)x$ に関する対称移動

問 4　連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x + 2y - 5z = -1 \\ \quad\ \ y - 3z = -2 \\ 2x + 2y - 4z = a \end{cases}$$

を考える．ただし，a は定数とする．この方程式の係数行列 A，拡大係数行列 B は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & a \end{pmatrix}$$

である．

(1)　$\operatorname{rank} A = \boxed{\mathbf{29}}$ である．

(2)　$a \neq \boxed{\mathbf{30}}$ のとき，$\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} B$ である．よって，方程式 $(*)$ は $\boxed{\mathbf{31}}$．

(3)　$a = \boxed{\mathbf{30}}$ のとき，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ である．このとき方程式 $(*)$ の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{32}} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\ t \text{ は任意定数})$$

と表すことができる．

$\boxed{\mathbf{29}}$ ・ $\boxed{\mathbf{30}}$ ・ $\boxed{\mathbf{32}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6	⑦ 7
	⑧ -1	⑨ -2	ⓐ -3	ⓑ -4	ⓒ -5	ⓓ -6	ⓔ -7

$\boxed{\mathbf{31}}$ の解答群

⓪ 解をもたない　　① ただ 1 組の解をもつ

② ちょうど 2 組の解をもつ　　③ ちょうど 3 組の解をもつ

④ 無数の解をもつ

計算用紙

問 5　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値が 3（重複度 2）と -2 であるとする．ただし，a は定数とする．

(1)　このとき $a = \boxed{\textbf{33}}$ である．

(2)　固有値 3 に対応する A の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boxed{\textbf{34}} \end{pmatrix}$ がとれる．

この $\boldsymbol{p}$ に対して

$$(A^3 - 2A^2 - A)\boldsymbol{p} = \boxed{\textbf{35}}\,\boldsymbol{p}$$

が成り立つ．

$\boxed{\textbf{33}}$ 〜 $\boxed{\textbf{35}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6	⑦ 7
	⑧ -1	⑨ -2	ⓐ -3	ⓑ -4	ⓒ -5	ⓓ -6	ⓔ -7

計算用紙

第3分野　常微分方程式

〔問 1 ～ 問 5 ： 解答番号　$\boxed{\mathbf{36}}$ ～ $\boxed{\mathbf{53}}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．すべての微分方程式は関数が定義される範囲で考える．また，特殊解は特解ともいう．

問 1　変数分離形の微分方程式

$$(*) \qquad (1+2x)y' = 3 + y$$

を $x > 0$ の範囲で考える．この一般解は任意定数 C を用いて

$$y = \boxed{\mathbf{36}} + C \cdot \boxed{\mathbf{37}}$$

と表される．

さらに，方程式 $(*)$ の解 $y = y(x)$ が初期条件 $y\left(\dfrac{3}{2}\right) = 3$ を満たすとき

$$y = \boxed{\mathbf{36}} + \boxed{\mathbf{38}} \cdot \boxed{\mathbf{37}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{36}}$ ・ $\boxed{\mathbf{38}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
	⑥ -1	⑦ -2	⑧ -3	⑨ -4	ⓐ -5

$\boxed{\mathbf{37}}$ の解答群

⓪ $1+x$	① $2+x$	② $1+2x$
③ $\sqrt{1+x}$	④ $\sqrt{2+x}$	⑤ $\sqrt{1+2x}$
⑥ $1+\sqrt{x}$	⑦ $2+\sqrt{x}$	⑧ $1+\sqrt{2x}$

計算用紙

問 2 解答群にある微分方程式の中から，以下の文章にあてはまるものをそれぞれ１つ選べ.

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{2}x^3 + x - \dfrac{5}{8}$ を解としてもつ微分方程式は $\boxed{\mathbf{39}}$ である.

(2) 関数 $y = 7\sin\sqrt{3}x$ を解としてもつ微分方程式は $\boxed{\mathbf{40}}$ である.

(3) 関数 $y = 2e^{3x}$ を解としてもつが，$y = -e^{-x}$ を解としてもたない微分方程式は $\boxed{\mathbf{41}}$ である.

$\boxed{\mathbf{39}}$ ～ $\boxed{\mathbf{41}}$ の解答群

⓪ $y'' + 3x = 0$　　① $y'' - 3x = 0$

② $y'' + 3y = 0$　　③ $y'' - 3y = 0$

④ $y'' + 3y' = 0$　　⑤ $y'' - 3y' = 0$

⑥ $y'' - 2y' + 3y = 0$　　⑦ $y'' - 2y' - 3y = 0$

計算用紙

問 3　微分方程式

$$(*) \qquad xy' + y = 3xy^2$$

を $x > 0$ の範囲で考える．

(1)　まず $y(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ とおくと，方程式 $(*)$ は u に関する 1 階線形微分方程式

$$(**) \qquad u' + \boxed{\mathbf{42}} = -3$$

となる．$(**)$ に対応する同次方程式 $u' + \boxed{\mathbf{42}} = 0$ の一般解は，任意定数 C_1 を用いて

$$({}_{*}^{*}{}_{*}) \qquad u = \boxed{\mathbf{43}}$$

と表される．

$\boxed{\mathbf{42}}$ の解答群

⓪ x	① $-x$	② xu	③ $-xu$	④ $\dfrac{1}{x}$	⑤ $-\dfrac{1}{x}$
⑥ $\dfrac{1}{x}u$	⑦ $-\dfrac{1}{x}u$	⑧ $\dfrac{1}{x^2}$	⑨ $-\dfrac{1}{x^2}$	ⓐ $\dfrac{1}{x^2}u$	ⓑ $-\dfrac{1}{x^2}u$

$\boxed{\mathbf{43}}$ の解答群

⓪ $x + C_1$	① $C_1 x$	② $x^2 + C_1$	③ $\sqrt{x} + C_1$
④ $C_1\sqrt{x}$	⑤ $C_1 x + 3$	⑥ $C_1\sqrt{x} + 3$	⑦ $C_1 x^2$

(2)　$({}_{*}^{*}{}_{*})$ において，C_1 を x の関数 $v(x)$ と置き換えて，$(**)$ に代入すると

$$v' = \boxed{\mathbf{44}}$$

となる．これを解けば

$$v = \boxed{\mathbf{45}} + C_2 \quad (C_2 \text{ は任意定数})$$

である．したがって，$(**)$ の一般解は

$$u = \boxed{\mathbf{46}}$$

となり，$(*)$ の一般解は $y = \dfrac{1}{\boxed{\mathbf{46}}}$ である．

$\boxed{\mathbf{44}}$ の解答群

⓪ $-\dfrac{x}{3}$　① $\dfrac{x}{3}$　② $-\dfrac{3}{x}$　③ $\dfrac{3}{x}$

④ $-3x$　⑤ $3x$　⑥ $-x-3$　⑦ $x-3$

$\boxed{\mathbf{45}}$ の解答群

⓪ $-\dfrac{1}{3}\log x$　① $\dfrac{1}{3}\log x$　② $-\log x$　③ $\log x$

④ $-3\log x$　⑤ $3\log x$　⑥ $-\log 3x$　⑦ $\log 3x$

$\boxed{\mathbf{46}}$ の解答群

⓪ $x\sqrt{x+C_2}$　① $x\left(\sqrt{2\log x}+C_2\right)$　② $x(\log x+C_2)$

③ $x\sqrt{\log x+C_2}$　④ $x(-x+C_2)$　⑤ $x\sqrt{-\log x+C_2}$

⑥ $x(-3\log x+C_2)$　⑦ $x(3\log x+C_2)$　⑧ $\log x+C_2$

問 4　微分方程式

$$(*) \qquad y'' + ay' + 4y = e^{bx}$$

について考える．ここで a, b は定数で，$b \neq 0$ とする．

(1)　$a = \boxed{\textbf{47}}$ のとき，$(*)$ に対応する同次方程式

$$y'' + ay' + 4y = 0$$

の一般解 y_h は任意定数 C_1, C_2 を用いて

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$$

と表される．

(2)　$a = \boxed{\textbf{47}}$ のとき，$(*)$ が $y_p = K\,e^{bx}$ (K は定数) の形の特殊解をもつのは

$$b \neq \boxed{\textbf{48}}$$

の場合である．このとき，$K = \boxed{\textbf{49}}$ となる．したがって，$(*)$ の一般解は

$$y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \boxed{\textbf{49}}\,e^{bx}$$

である．

$\boxed{\textbf{47}}$・$\boxed{\textbf{48}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 4　④ 8　⑤ 16

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -4　⑨ -8　ⓐ -16

$\boxed{\textbf{49}}$ の解答群

⓪ b　① $2b$　② $4b$　③ $(b-2)^2$　④ $(b-4)^2$

⑤ $\dfrac{1}{b}$　⑥ $\dfrac{1}{2b}$　⑦ $\dfrac{1}{4b}$　⑧ $\dfrac{1}{(b-2)^2}$　⑨ $\dfrac{1}{(b-4)^2}$

計算用紙

問 5　関数 $y = y(x)$ $\left(-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}\right)$ は微分方程式

$$(*) \qquad y'' = 1 + 4(y')^2$$

の解で初期条件 $y(0) = y'(0) = 0$ を満たすものとする．

(1)　$z = y'$ とおくと，$(*)$ は $z(x)$ に関する変数分離形微分方程式

$$z' = 1 + 4z^2$$

となる．これを解けば，ある定数 C_1 を用いて

$$(**) \qquad \boxed{\mathbf{50}} = 2x + C_1$$

が得られる．

$\boxed{50}$ の解答群

⓪ $z + \dfrac{4}{3}z^3$	① $2z + \dfrac{8}{3}z^3$	② $\log(1 + 4z^2)$
③ $\dfrac{1}{\tan 2z}$	④ $\tan^{-1} 2z$	⑤ $2\tan^{-1} 2z$
⑥ $\dfrac{1}{\sin 2z}$	⑦ $\sin^{-1} 2z$	⑧ $2\sin^{-1} 2z$
⑨ $\dfrac{1}{\cos 2z}$	ⓐ $\cos^{-1} 2z$	ⓑ $2\cos^{-1} 2z$

(2)　$z(0) = y'(0) = 0$ より，$(**)$ において $C_1 = \boxed{\mathbf{51}}$ となる．このとき

$$y' = z = \boxed{\mathbf{52}}$$

であるから，ある定数 C_2 を用いて

$$y = \int \boxed{\mathbf{52}}\, dx = \boxed{\mathbf{53}} + C_2$$

と表される．さらに，条件 $y(0) = 0$ より $C_2 = 0$ となり

$$y = \boxed{\mathbf{53}}$$

である．

$\boxed{51}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② -1　③ 2　④ -2

⑤ $\dfrac{\pi}{2}$　⑥ $-\dfrac{\pi}{2}$　⑦ π　⑧ $-\pi$

$\boxed{52}$・$\boxed{53}$ の解答群

⓪ $\sin 2x$　① $\dfrac{1}{2}\sin 2x$　② $\cos 2x$

③ $\dfrac{1}{2}\cos 2x$　④ $\tan 2x$　⑤ $\dfrac{1}{2}\tan 2x$

⑥ $\dfrac{1}{\cos 2x}$　⑦ $-\dfrac{1}{\cos 2x}$　⑧ $\dfrac{1}{2}\log(\cos 2x)$

⑨ $-\dfrac{1}{2}\log(\cos 2x)$　ⓐ $\dfrac{1}{4}\log(\cos 2x)$　ⓑ $-\dfrac{1}{4}\log(\cos 2x)$

ⓒ $\log(\cos 2x)$　ⓓ $-\log(\cos 2x)$

第4分野 確率・統計

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{54}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{69}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1 (1) 確率変数 X, Y が独立で，確率分布がともに

X の値（Y の値）	-4	-1	0	2	3
確率	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

(a は定数)

で与えられているとき

$$E(X) = E(Y) = \boxed{\mathbf{54}}, \quad V(X) = V(Y) = \boxed{\mathbf{55}}$$

である．また

$$V\left(\frac{X+2Y}{3}\right) = \boxed{\mathbf{56}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{54}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{56}}$ **の解答群**

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5
⑥ $\frac{1}{2}$	⑦ $\frac{3}{2}$	⑧ $\frac{5}{2}$	⑨ $\frac{7}{2}$	ⓐ $\frac{9}{2}$	ⓑ $\frac{11}{2}$
ⓒ $\frac{1}{3}$	ⓓ $\frac{5}{3}$	ⓔ $\frac{1}{4}$	ⓕ $\frac{3}{4}$		

(2) 確率変数 X がパラメータ λ をもつポアソン分布に従っている．すなわち

$$P(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

とする．また，$E(X)=3$ であるとする．このとき，$\lambda =$ **57** であり

$$P(X \geqq 2) = \boxed{\mathbf{58}}$$

である．

57 ・ **58** の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 9

⑤ $\sqrt{3}$　⑥ $\frac{1}{3}$　⑦ $\frac{2}{3}$　⑧ $\frac{1}{9}$　⑨ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ⓐ e　ⓑ e^3　ⓒ $\log 3$

ⓓ $1-3e^{-3}$　ⓔ $1+3e^{-3}$　ⓕ $1-4e^{-3}$　ⓖ $1+4e^{-3}$

問 2　ある工場では3つの機械 a, b, c を用いてそれぞれ同じ製品を作っている．それぞれの機械から作られる製品の個数の割合は 4 : 3 : 3 である．また，不良品の出る確率は a が 3%，b が 4%，c が 2% である．製品の中から無作為に取り出した1個が機械 a, b, c を用いて作られたものであるという事象をそれぞれ A, B, C で表し，製品が不良品であるという事象を F とする．このとき

$$P(A) = \frac{4}{10},\quad P(B) = \frac{3}{10},\quad P(C) = \frac{3}{10},$$

$$P(F|A) = \frac{3}{100},\quad P(F|B) = \frac{4}{100},\quad P(F|C) = \frac{2}{100}$$

である．ここで，2つの事象 D, E に対し，$P(D|E)$ は E が起こったときの D が起こる条件付き確率を表す．取り出した製品が機械 a を用いて作られ，かつ不良品である確率は

$$P(A \cap F) = \boxed{\textbf{59}}$$

である．また， 取り出した製品が不良品である確率は

$$P(F) = \boxed{\textbf{60}}$$

である．さらに，取り出した製品が不良品であったとき，それが機械 a を用いて作られたものである確率は

$$P(A|F) = \boxed{\textbf{61}}$$

である．

$\boxed{59}$ 〜 $\boxed{61}$ の解答群

⓪ $\frac{2}{5}$	① $\frac{3}{5}$	② $\frac{4}{5}$	③ $\frac{2}{6}$	④ $\frac{3}{6}$
⑤ $\frac{2}{100}$	⑥ $\frac{3}{100}$	⑦ $\frac{4}{100}$	⑧ $\frac{7}{100}$	⑨ $\frac{9}{100}$
ⓐ $\frac{10}{1000}$	ⓑ $\frac{12}{1000}$	ⓒ $\frac{14}{1000}$	ⓓ $\frac{16}{1000}$	ⓔ $\frac{18}{1000}$

計算用紙

問 3 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が，ある定数 c に対して

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{(x+3)^2} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で与えられている．

(1) $c =$ $\boxed{\textbf{62}}$ である．

$\boxed{\textbf{62}}$ **の解答群**

⓪ 0 ① 1 ② 2 ③ 3 ④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{1}{3}$ ⑥ $\dfrac{1}{4}$

(2) X の分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とすると

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{\textbf{63}} & (x \geqq 0) \\ \boxed{\textbf{64}} & (x < 0) \end{cases}$$

である．また，$P(|X| \leqq 1) =$ $\boxed{\textbf{65}}$ である．

$\boxed{\textbf{63}}$ ・ $\boxed{\textbf{64}}$ **の解答群**

⓪ 0 ① 1 ② $\dfrac{1}{x+3}$ ③ $-\dfrac{1}{x+3}$

④ $\dfrac{3}{x+3}$ ⑤ $-\dfrac{3}{x+3}$ ⑥ $1-\dfrac{1}{x+3}$ ⑦ $1+\dfrac{1}{x+3}$

⑧ $1-\dfrac{3}{x+3}$ ⑨ $1+\dfrac{3}{x+3}$

$\boxed{\textbf{65}}$ **の解答群**

⓪ 0 ① 1 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{2}{3}$

⑤ $\dfrac{1}{4}$ ⑥ $\dfrac{3}{4}$ ⑦ $\dfrac{1}{5}$ ⑧ $\dfrac{2}{5}$ ⑨ $\dfrac{3}{5}$

計算用紙

問 4　ある飲料メーカーでは，500 ml 入りのペットボトル飲料の製品 Q を製造している．この製品を製造する機械を変更したので，変更前と同様の内容量で製品が作られているか調べることにした．過去の測定データから，製品 Q の 1 本あたりの内容量は正規分布に従い，内容量の母標準偏差は 0.5 ml と仮定してよいことがわかっている．変更後の製造機械で作られた製品 Q を無作為に 100 本抽出し，その内容量を測定したところ，平均は 499.74 ml であった．

この測定に基づいて，母平均 μ ml に対する

帰無仮説 H_0 ： $\mu = 500$

対立仮説 H_1 ： $\mu \neq 500$

の両側検定を有意水準 1% で行うことにした．抽出した 100 本の内容量をそれぞれ確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とすると，これらはすべて独立で正規分布 $N(\mu, 0.5^2)$ に従う．このとき，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

は正規分布 $N\left(\boxed{\mathbf{66}}, \boxed{\mathbf{67}}\right)$ に従う．帰無仮説 H_0 のもとでは

$$Z = \frac{\overline{X} - 500}{0.5/\sqrt{100}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である．正規分布表から

$$P(-2.576 \leqq Z \leqq 2.576) \fallingdotseq 0.99$$

がわかる．一方，標本平均 $\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = 499.74$（単位：ml）であるので，Z の実現値は $z = \boxed{\mathbf{68}}$ となる．よって，帰無仮説 H_0 は有意水準 1% で $\boxed{\mathbf{69}}$ ．

$\boxed{\mathbf{66}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{\mu}{100}$　① $\dfrac{\mu}{10}$　② μ　③ 10μ　④ 100μ　⑤ 0.5μ　⑥ $0.5^2\mu$

$\boxed{\mathbf{67}}$ の解答群

⓪ 100×0.5　① 100×0.5^2　② $100^2 \times 0.5^2$　③ 0.5^2

④ $\dfrac{0.5}{100}$　⑤ $\dfrac{0.5^2}{100}$　⑥ $\dfrac{0.5}{100^2}$　⑦ $\dfrac{0.5^2}{100^2}$

$\boxed{\textbf{68}}$ の解答群

⓪ 0

① 0.26　② 0.52　③ 0.78　④ 1.04

⑤ 2.6　⑥ 5.2　⑦ 7.8　⑧ 10.4

⑨ -0.26　ⓐ -0.52　ⓑ -0.78　ⓒ -1.04

ⓓ -2.6　ⓔ -5.2　ⓕ -7.8　ⓖ -10.4

$\boxed{\textbf{69}}$ の解答群

⓪ 採択される　① 棄却される