EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2024年12月14日（土）
4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊ 受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．
(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．
(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．
(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．
(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．
(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．
(8) 問題冊子は持ち帰ること．
(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\mathbf{23}}$ は（$\boxed{\mathbf{23}}$）という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2-\boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

(6) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{17}}$ 〕

問１　次の 2 つの極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x} = \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{x+3}} = \boxed{\mathbf{2}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ ・ $\boxed{\mathbf{2}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{3}$　⑥ $\dfrac{2}{3}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ $-\dfrac{1}{2}$　ⓑ $-\dfrac{1}{3}$　ⓒ $-\dfrac{2}{3}$

ⓓ e　ⓔ ∞　ⓕ $-\infty$

計算用紙

問 2 (1) 関数 $\sin x$ のマクローリン展開（$x=0$ を中心とするテイラー展開）は

$$\sin x \ = \ \boxed{\mathbf{3}}$$

である．したがって，関数 $\sin(\sin x)$ のマクローリン展開を

$$\sin(\sin x) \ = \ x + ax^3 + \frac{1}{10}x^5 + \cdots$$

とおくと $a = \boxed{\mathbf{4}}$ である．

(2) 関数 $\sqrt{1+\sin x}$ のマクローリン展開を

$$\sqrt{1+\sin x} \ = \ 1 + \frac{1}{2}x + bx^2 + \cdots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと $b = \boxed{\mathbf{5}}$ である．

$\boxed{3}$ の解答群

⓪ $1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^6}{6} + \cdots$	① $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^6}{6} + \cdots$
② $1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$	③ $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$
④ $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \cdots$	⑤ $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$
⑥ $x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$	⑦ $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$

$\boxed{4}$・$\boxed{5}$ の解答群

⓪ 0

① 1	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{1}{3}$	④ $\dfrac{1}{4}$	⑤ $\dfrac{1}{5}$	⑥ $\dfrac{1}{6}$	⑦ $\dfrac{1}{8}$
⑧ -1	⑨ $-\dfrac{1}{2}$	ⓐ $-\dfrac{1}{3}$	ⓑ $-\dfrac{1}{4}$	ⓒ $-\dfrac{1}{5}$	ⓓ $-\dfrac{1}{6}$	ⓔ $-\dfrac{1}{8}$

計算用紙

問 3 (1) 正の定数 a に対して，不定積分

$$I = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2}$$

を求める．まず，$J = \displaystyle\int \frac{dt}{t^2+a^2}$ とおき，$J = \displaystyle\int \frac{(t)'}{t^2+a^2}dt$ とみなして部分積分を行うと

$$J = \frac{t}{t^2+a^2} + 2J - \boxed{\mathbf{6}}\, I$$

となる．ここで，$J = \boxed{\mathbf{7}} + C$ (C は積分定数) なので

$$I = \frac{1}{\boxed{\mathbf{6}}}\left(\frac{t}{t^2+a^2} + \boxed{\mathbf{7}} + C\right)$$

と求まる．

6 の解答群

⓪ a　① $2a$　② $3a$　③ $4a$　④ $5a$　⑤ $6a$　⑥ $7a$

⑦ a^2　⑧ $2a^2$　⑨ $3a^2$　ⓐ $4a^2$　ⓑ $5a^2$　ⓒ $6a^2$　ⓓ $7a^2$

7 の解答群

⓪ $\dfrac{2}{t^2+a^2}$　① $\dfrac{2t}{t^2+a^2}$　② $\dfrac{2t^2}{t^2+a^2}$　③ $\dfrac{2}{(t^2+a^2)^2}$

④ $\dfrac{2t}{(t^2+a^2)^2}$　⑤ $\dfrac{2t^2}{(t^2+a^2)^2}$　⑥ $\tan^{-1} at$　⑦ $a\tan^{-1} at$

⑧ $\dfrac{1}{a}\tan^{-1} at$　⑨ $\tan^{-1}\dfrac{t}{a}$　ⓐ $a\tan^{-1}\dfrac{t}{a}$　ⓑ $\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{t}{a}$

(2)　不定積分

$$K = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$$

を求める．$t = \boxed{\mathbf{8}}$ として置換積分法を用いると，(1) より

$$K = \int \frac{dt}{(t^2+4)^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{\boxed{\mathbf{8}}}{x^2} + \boxed{\mathbf{9}} + C'\right) \quad (C' \text{ は積分定数})$$

となる．

$\boxed{\mathbf{8}}$ ・ $\boxed{\mathbf{9}}$ **の解答群**

⓪ $\sqrt{x+2}$	① $\sqrt{x-2}$	② $\sqrt{x^2-4}$
③ $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$	④ $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$	⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$
⑥ $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$	⑦ $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x-2}}{2}$	⑧ $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2}$
⑨ $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$	ⓐ $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x-2}}{2}$	ⓑ $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2}$

問 4　2 変数関数

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}y^2 + xy - 6x - \frac{3}{2}y + 4$$

の極値について考える．

(1)　連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

の解は $(x,y) = (3,\ -3)$ と $(x,y) = \boxed{\mathbf{10}}$ の 2 つである．

$\boxed{10}$ の解答群

⓪ $(1,\ 1)$	① $(2,\ 3)$	② $(0,\ 1)$	③ $(2,\ 2)$
④ $(0,\ -1)$	⑤ $(-1,\ 5)$	⑥ $(3,\ -1)$	⑦ $(-2,\ -3)$

(2)　点 $(3,\ -3)$ については，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,-3) = \boxed{\mathbf{11}}$ であり

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,\ -3) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,\ -3) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3,\ -3) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,\ -3) \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{12}}$$

である．したがって，関数 $f(x,y)$ は点 $(3,\ -3)$ で $\boxed{\mathbf{13}}$．

$\boxed{11}$・$\boxed{12}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6	⑦ 7
	⑧ -1	⑨ -2	ⓐ -3	ⓑ -4	ⓒ -5	ⓓ -6	ⓔ -7

$\boxed{13}$ の解答群

⓪ 極大値をとる　① 極小値をとる　② 極値をとらない

計算用紙

問 5 xy 平面内の集合 D が

$$D = \left\{(x, y) \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ x + y \geqq 0\right\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D \log \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$$

の値を求める．極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行うと，集合 D に対応する (r, θ) の集合は

$$E = \left\{(r, \theta) \;\middle|\; 1 \leqq r \leqq \boxed{\mathbf{14}},\ -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{15}}\right\}$$

であるから

$$I = \iint_E \boxed{\mathbf{16}}\, drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\boxed{\mathbf{15}}} \left(\int_1^{\boxed{\mathbf{14}}} \boxed{\mathbf{16}}\, dr\right) d\theta = \boxed{\mathbf{17}}\,\pi$$

となる．

$\boxed{14}$ ・ $\boxed{15}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 8	⑥ $\sqrt{2}$
⑦ $\dfrac{\pi}{4}$	⑧ $\dfrac{\pi}{2}$	⑨ $\dfrac{3}{4}\pi$	ⓐ π	ⓑ $\dfrac{5}{4}\pi$	ⓒ $\dfrac{3}{2}\pi$	ⓓ 2π

$\boxed{16}$ ・ $\boxed{17}$ の解答群

⓪ $\log r$	① $\dfrac{1}{2}\log r$	② $r\log r$	③ $r^2\log r$
④ $-\dfrac{1}{4}$	⑤ $-\dfrac{3}{4}$	⑥ $\log 2$	⑦ 2
⑧ $2\log 2 - \dfrac{3}{4}$	⑨ $\dfrac{3}{2}\log 2 - \dfrac{3}{2}$	ⓐ $\log 2 - \dfrac{3}{2}$	ⓑ $\dfrac{3}{2}\log 2 - 1$

計算用紙

第２分野　線形代数

〔 問１〜問５ ： 解答番号 $\boxed{\textbf{18}}$ 〜 $\boxed{\textbf{36}}$ 〕

(注意) 行列 A に対し，$\operatorname{rank} A$ は A の階数（ランク）を表す.

問１ (1) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

とする．このとき行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\textbf{18}}$ である．また，逆行列 A^{-1} の $(1,2)$ 成分は $\boxed{\textbf{19}}$ である.

$\boxed{\textbf{18}}$ ・ $\boxed{\textbf{19}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7

⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3　ⓑ -4　ⓒ -5　ⓓ -6　ⓔ -7

(2) a, b を定数とする．座標平面において，点 (x, y) を点 (u, v) に移す線形写像 f を

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める．f により直線 $y = -x + 1$ 上のすべての点が直線 $y = bx + 1$ 上に移るとき，$a = \boxed{\textbf{20}}$, $b = \boxed{\textbf{21}}$ である.

$\boxed{\textbf{20}}$ ・ $\boxed{\textbf{21}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7

⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3　ⓑ -4　ⓒ -5　ⓓ -6　ⓔ -7

計算用紙

問 2　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ におけるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

とおく．ただし，s は定数とする．

(1)　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立になるのは $s \neq$ $\boxed{\mathbf{22}}$ のときである．

(2)　$s =$ $\boxed{\mathbf{22}}$ のとき，$\boldsymbol{c} =$ $\boxed{\mathbf{23}}$ $\boldsymbol{a} +$ $\boxed{\mathbf{24}}$ $\boldsymbol{b}$ と表すことができる．

(3)　$\mathbb{R}^3$ の原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ となる点を A, B とする．このとき，三角形 $\triangle$OAB の面積は $\boxed{\mathbf{25}}$ である．

$\boxed{\mathbf{22}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{25}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ $\dfrac{1}{4}$　⑤ $\dfrac{3}{4}$　⑥ $\dfrac{3}{2}$　⑦ $\dfrac{5}{2}$

⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3　ⓑ $-\dfrac{1}{4}$　ⓒ $-\dfrac{3}{4}$　ⓓ $-\dfrac{3}{2}$　ⓔ $-\dfrac{5}{2}$

計算用紙

問 3 (1) A, B を 2 次の正方行列とする．このとき，以下の命題のうち真であるものをすべて選ぶと $\boxed{\mathbf{26}}$ である．

1. A, B が正則ならば，和 $A+B$ は正則である．

2. A, B が正則ならば，積 AB は正則である．

3. 積 AB が正則ならば，A, B はどちらも正則である．

4. 対角行列は正則である．

$\boxed{\mathbf{26}}$ **の解答群**

⓪ **1**	① **2**	② **3**	③ **4**
④ **1**, **2**	⑤ **1**, **3**	⑥ **1**, **4**	⑦ **2**, **3**
⑧ **2**, **4**	⑨ **3**, **4**	ⓐ **1**, **2**, **3**	ⓑ **1**, **2**, **4**
ⓒ **1**, **3**, **4**	ⓓ **2**, **3**, **4**	ⓔ **1**, **2**, **3**, **4**	

(2) A, B, C を 2 次の正方行列とする．このとき，以下の命題のうち真であるものをすべて選ぶと $\boxed{\mathbf{27}}$ である．

5. 積 AB が零行列であるならば，A, B のどちらか一方は零行列である．

6. A が零行列でないならば，$AB = AC$ のとき $B = C$ が成り立つ．

7. すべての正の数 a に対して，$|aA| = a|A|$ が成り立つ．

8. $|AB| = |A|\,|B|$ が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{27}}$ **の解答群**

⓪ **5**	① **6**	② **7**	③ **8**
④ **5**, **6**	⑤ **5**, **7**	⑥ **5**, **8**	⑦ **6**, **7**
⑧ **6**, **8**	⑨ **7**, **8**	ⓐ **5**, **6**, **7**	ⓑ **5**, **6**, **8**
ⓒ **5**, **7**, **8**	ⓓ **6**, **7**, **8**	ⓔ **5**, **6**, **7**, **8**	

計算用紙

問 4　連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} 2x + 3y + az = 1 \\ x + y + (1-b)z = 0 \\ y + ab\,z = 2 \end{cases}$$

を考える．ただし，a, b は定数とする．この方程式の係数行列 A，拡大係数行列 B は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 1-b \\ 0 & 1 & ab \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1-b & 0 \\ 0 & 1 & ab & 2 \end{pmatrix}$$

である．

(1)　$\mathrm{rank}\,B =$ $\boxed{\mathbf{28}}$ である．

(2)　$a =$ $\boxed{\mathbf{29}}$ または $b =$ $\boxed{\mathbf{30}}$ のとき，$\mathrm{rank}\,A < \mathrm{rank}\,B$ である．よって，方程式 $(*)$ は $\boxed{\mathbf{31}}$ ．

(3)　$a \neq$ $\boxed{\mathbf{29}}$ かつ $b \neq$ $\boxed{\mathbf{30}}$ のとき，$\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\,B =$ $\boxed{\mathbf{28}}$ である．よって，方程式 $(*)$ は $\boxed{\mathbf{32}}$ ．

$\boxed{28}$ ～ $\boxed{30}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7

⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3　ⓑ -4　ⓒ -5　ⓓ -6　ⓔ -7

$\boxed{31}$ ・ $\boxed{32}$ の解答群

⓪ 解をもたない　① ただ 1 組の解をもつ　② 無数の解をもつ

計算用紙

問 5　行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & a & 2 \end{pmatrix}$ の対角化について考える．ただし，a は定数とする．

(1)　A の固有多項式は

$$\begin{vmatrix} 4-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 0 \\ -3 & a & 2-x \end{vmatrix} = -(x-2)^2(x-\boxed{\mathbf{33}})$$

である．したがって，A の固有値は 2（重複度 2）と $\boxed{\mathbf{33}}$ となる．

(2)　$a = \boxed{\mathbf{34}}$ とする．このとき，固有値 2 に対する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{35}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれ，また固有値 $\boxed{\mathbf{33}}$ に対する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{36}} \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

がとれる．したがって，$P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ とおけば，行列 P は A を対角化する正則行列となる．実際に確かめると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\mathbf{33}} \end{pmatrix}$$

となる．

$\boxed{\mathbf{33}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{36}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7

⑧ −1　⑨ −2　ⓐ −3　ⓑ −4　ⓒ −5　ⓓ −6　ⓔ −7

計算用紙

第3分野　常微分方程式

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{37}}$ ～ $\boxed{\textbf{52}}$ 〕

(注意)　各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．すべての微分方程式は関数が定義される範囲で考える．また，特殊解は特解ともいう．

問 1　微分方程式

$$(*)\qquad yy' + 2x(y^2+1) = 0$$

について考える．

(1)　$(*)$ の一般解は任意の正の定数 C を用いて

$$y^2 + 1 = C\,\boxed{\textbf{37}}$$

で与えられる．

$\boxed{\textbf{37}}$ の解答群

⓪ x^2	① $\log(x^2+1)$	② e^{x^2}	③ e^{-x^2}
④ $\dfrac{1}{x^2+1}$	⑤ $\dfrac{1}{2x^2+1}$	⑥ e^{2x^2}	⑦ e^{-2x^2}

(2)　$(*)$ の解 $y = y(x)$ が初期条件 $y(0) = 1$ を満たすとき

$$y = \boxed{\textbf{38}}$$

である．

$\boxed{\textbf{38}}$ の解答群

⓪ $2x^2 - 1$	① $\sqrt{2x^2-1}$	② $2e^{-x^2}$
③ $\log(x^2+1)+1$	④ $2e^{-x^2}-1$	⑤ $2e^{-2x^2}-1$
⑥ $\sqrt{\log(x^2+1)+1}$	⑦ $\sqrt{2e^{-x^2}-1}$	⑧ $\sqrt{2e^{-2x^2}-1}$

計算用紙

問 2　微分方程式

$$(*)\qquad y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

について考える．

(1)　(∗) に対応する同次方程式

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = 0$$

の一般解は，C を任意定数とすると

$$(**)\qquad y = C\,\boxed{\mathbf{39}}$$

と表される．

$\boxed{\mathbf{39}}$ の解答群

⓪ $1+x$	① $\sqrt{1+x}$	② $1+x^2$	③ $\sqrt{1+x^2}$
④ $e^{\frac{x}{1+x^2}}$	⑤ $e^{-\frac{x}{1+x^2}}$	⑥ e^{x^2}	⑦ e^{-x^2}
⑧ $\log(1+x)$	⑨ $\log(1+x^2)$	ⓐ $\tan^{-1}x$	ⓑ $\sin^{-1}x$

(2)　(∗∗) において，C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて，$y = u(x)\cdot \boxed{\mathbf{39}}$ を (∗) に代入すると

$$u' = \boxed{\mathbf{40}}$$

が得られる．この方程式の一般解は，任意定数 $\tilde{C}$ を用いて $u(x) = \boxed{\mathbf{41}} + \tilde{C}$ となるので，(∗) の一般解は

$$y = \left(\boxed{\mathbf{41}} + \tilde{C}\right)\cdot \boxed{\mathbf{39}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{40}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	① $\dfrac{u}{\sqrt{1+x^2}}$	② $\dfrac{1}{1+x^2}$	③ $\dfrac{u}{1+x^2}$
④ $\dfrac{1}{1+x}$	⑤ $\dfrac{x}{1+ux}$	⑥ $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$	⑦ $\dfrac{1}{\tan x}$

$\boxed{\mathbf{41}}$ **の解答群**

⓪ $\sqrt{1+x^2}$	① $\dfrac{2}{\log(1+x^2)}$	② $\dfrac{1}{1+x^2}$	③ e^{2x}
④ $\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$	⑤ $\log(1+x^2)$	⑥ $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$	⑦ e^{-x^2}
⑧ $\tan x$	⑨ $\tan^{-1} x$	ⓐ $\sin x$	ⓑ $\sin^{-1} x$

問 3　xy 平面上の曲線 $C: y = y(x)\ (2 < x < 4)$ は，点 $\mathrm{A}(3,3)$ を通り，C 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y)$ における C の接線は点 $\mathrm{P}(x,y)$ と点 $\mathrm{B}(3,2)$ を通る直線に垂直であるとする．このとき，関数 $y(x)$ が満たす微分方程式を求めたい．

C 上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ における接線の傾きは $y'(x)$ であり，仮定より，この接線は点 $\mathrm{P}(x,y)$ と点 $\mathrm{B}(3,2)$ を通る直線に垂直なので，関数 $y(x)$ は微分方程式

$(*)\qquad y' = \boxed{\mathbf{42}}$

を満たす．

よって，微分方程式 $(*)$ を解き，C が点 $\mathrm{A}(3,3)$ を通ることを用いると，C 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y)$ は $\boxed{\mathbf{43}}$ を満たす．C は xy 平面上の $\boxed{\mathbf{44}}$ の一部を表す．

$\boxed{\mathbf{42}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{y}{x}$	① $-\dfrac{y}{x}$	② $\dfrac{x}{y}$	③ $-\dfrac{x}{y}$
④ $\dfrac{y-2}{x-3}$	⑤ $-\dfrac{y-2}{x-3}$	⑥ $\dfrac{y-3}{x-2}$	⑦ $-\dfrac{y-3}{x-2}$
⑧ $\dfrac{x-3}{y-2}$	⑨ $-\dfrac{x-3}{y-2}$	ⓐ $\dfrac{x-2}{y-3}$	ⓑ $-\dfrac{x-2}{y-3}$

$\boxed{\mathbf{43}}$ の解答群

⓪ $y = 2x - 3$	① $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$	② $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$
③ $y = \dfrac{1}{8}x^2$	④ $y^2 = 2x$	⑤ $(x-3)^2 - (y-2)^2 = 1$
⑥ $x^2 + y^2 = 20$	⑦ $x^2 - y^2 = 12$	⑧ $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 3$
⑨ $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	ⓐ $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$	ⓑ $(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)$

$\boxed{\mathbf{44}}$ の解答群

⓪ 直線	① 円	② 双曲線	③ 放物線
④ レムニスケート	⑤ 懸垂線		

計算用紙

問 4　微分方程式

$$(*) \qquad y'' + \frac{9}{4}\,y = 0$$

について考える．

(1)　(*) の一般解 $y(x)$ は任意定数 C_1, C_2 を用いて $y(x) = \boxed{\textbf{45}}$ と表される．

$\boxed{\textbf{45}}$ の解答群

⓪ $C_1\,e^{-\frac{9}{4}x} + C_2\,e^{\frac{9}{4}x}$	① $C_1\,e^{-\frac{3}{2}x} + C_2\,e^{\frac{3}{2}x}$
② $C_1 + C_2\,e^{-\frac{9}{4}x}$	③ $C_1\,e^{\frac{3}{2}x} + C_2\,xe^{\frac{3}{2}x}$
④ $C_1\cos\dfrac{9}{4}x + C_2\sin\dfrac{9}{4}x$	⑤ $C_1\cos\dfrac{3}{2}x + C_2\sin\dfrac{3}{2}x$

(2)　(1) で求めた (*) の解 $y(x)$ が，条件

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) < 0, \quad \int_0^{\pi} y(x)^2\,dx = 1$$

を満たすとき

$$C_1 = \boxed{\textbf{46}}, \quad C_2 = \boxed{\textbf{47}}$$

である．

$\boxed{\textbf{46}}$ ・ $\boxed{\textbf{47}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② π	③ π^2	④ $\dfrac{\pi}{2}$	⑤ $\dfrac{\pi^2}{4}$
⑥ $\dfrac{1}{\pi}$	⑦ $\dfrac{2}{\pi}$	⑧ $\sqrt{\pi}$	⑨ $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$	ⓐ $\sqrt{\dfrac{1}{\pi}}$	ⓑ $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

計算用紙

問 5　微分方程式

$$(*) \qquad y'' + 2y' + 5y = \cos\omega x$$

について考える．ただし，ω は正の実数である．

(1)　$y_p(x) = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$ が $(*)$ の特殊解になるように，定数 C_1, C_2 を定める．$y_p(x)$ を $(*)$ へ代入し，$\cos\omega x$ と $\sin\omega x$ の係数をそれぞれ比較すると，係数行列を用いて C_1 と C_2 に関する連立方程式

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{48}} & \boxed{\mathbf{49}} \\ -\boxed{\mathbf{49}} & \boxed{\mathbf{48}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る．係数行列の逆行列が存在するので

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{48}} & \boxed{\mathbf{49}} \\ -\boxed{\mathbf{49}} & \boxed{\mathbf{48}} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり，$C_1 = \dfrac{\boxed{\mathbf{48}}}{\boxed{\mathbf{50}}}$, $C_2 = \dfrac{\boxed{\mathbf{49}}}{\boxed{\mathbf{50}}}$ を得る．

$\boxed{48}$ ・ $\boxed{49}$ の解答群

⓪ 2ω　① -2ω　② $4\omega^2$　③ $\dfrac{2}{\omega}$　④ $-\dfrac{2}{\omega}$

⑤ $\omega^2 - 5$　⑥ $5 - \omega^2$　⑦ $(5-\omega^2)^2$　⑧ $\dfrac{1}{\omega^2 - 5}$　⑨ $\dfrac{1}{5 - \omega^2}$

$\boxed{50}$ の解答群

⓪ 2ω　① -2ω　② $\omega^2 - 5$　③ $5 - \omega^2$

④ $-\omega^2 + 2\omega + 5$　⑤ $-\omega^2 - 2\omega + 5$　⑥ $4\omega^2$　⑦ $(5-\omega^2)^2$

⑧ $(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2$　⑨ $(-\omega^2 + 2\omega + 5)^2$　ⓐ $5 + \omega^2$　ⓑ $(5+\omega^2)^2$

(2) 三角関数の合成より，(1) で求めた y_p は

$$I = \frac{1}{\sqrt{\boxed{50}}}, \quad \sin\phi = \frac{\boxed{48}}{\sqrt{\boxed{50}}}, \quad \cos\phi = \frac{\boxed{49}}{\sqrt{\boxed{50}}}$$

を用いて $y_p(x) = I\sin(\omega x + \phi)$ と表せる．

ω を正の実数全体を動かすことで，I を ω の関数 $I(\omega)$ と考える．このとき，$I(\omega)$ は $\omega =$ **51** で最大値 **52** をとる．

51 ・ **52** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ $\sqrt{2}$	⑦ $\sqrt{3}$
⑧ $\sqrt{5}$	⑨ $\frac{1}{2}$	ⓐ $\frac{1}{3}$	ⓑ $\frac{1}{4}$	ⓒ $\frac{1}{5}$	ⓓ $\frac{1}{\sqrt{2}}$	ⓔ $\frac{1}{\sqrt{3}}$	ⓕ $\frac{1}{\sqrt{5}}$

第4分野　確率・統計

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{53}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{71}}$ 〕

(注意)　事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1　(1)　確率変数 X, Y の確率分布がそれぞれ

X の値	-3	0	2
確率	a	0.3	b

Y の値	-1	4
確率	0.6	0.4

(a, b は定数)

で与えられていて，$E(X) = 0.4$ が成り立つとする．このとき，$a = \boxed{\mathbf{53}}$ である．また $V(-Y) = \boxed{\mathbf{54}}$ である．さらに，X, Y が独立であれば

$$P(XY = -2) = \boxed{\mathbf{55}}, \quad E(XY) = \boxed{\mathbf{56}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{53}}$ ・ $\boxed{\mathbf{55}}$ ・ $\boxed{\mathbf{56}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 0.1　② 0.2　③ 0.3　④ 0.4　⑤ 0.5
⑥ 0.6　⑦ 0.7　⑧ 0.8　⑨ 0.9　ⓐ 1

$\boxed{\mathbf{54}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 6　④ 7　⑤ 8
⑥ -1　⑦ -2　⑧ -6　⑨ -7　ⓐ -8

(2)　確率変数 Z の確率密度関数 $f(x)$ が，定数 c によって

$$f(x) = \begin{cases} c\,e^{-2(x-1)}, & x \geqq 1, \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

で与えられている．このとき，$c =$ $\boxed{\textbf{57}}$ であり，$E(Z) =$ $\boxed{\textbf{58}}$ が成り立つ．
また

$$P(-2 < Z \leqq \boxed{\textbf{59}}\,) = 1 - e^{-6}$$

である．

$\boxed{\textbf{57}}$ 〜 $\boxed{\textbf{59}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 6
	⑥ $\dfrac{1}{2}$	⑦ $\dfrac{3}{2}$	⑧ $\dfrac{1}{3}$	⑨ $\dfrac{2}{3}$	ⓐ $\dfrac{1}{6}$
	ⓑ e^{-2}	ⓒ e^{-3}	ⓓ e^{-6}	ⓔ $\log 2$	ⓕ $\log 3$

問 2　2 つの事象 A, B に対し

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

とする．

(1)　$P(A \cap B) = \boxed{\mathbf{60}}$ であり，A と B は $\boxed{\mathbf{61}}$．

(2)　事象 C が $P(C) = \dfrac{1}{8}$ かつ $C \subset A \cap B$ を満たすとき，$A \cap B$ が起こったときの C が起こる条件付き確率は $P(C \mid A \cap B) = \boxed{\mathbf{62}}$ である．

$\boxed{\mathbf{60}}$ ・ $\boxed{\mathbf{62}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{1}{3}$	④ $\dfrac{2}{3}$
	⑤ $\dfrac{1}{4}$	⑥ $\dfrac{3}{4}$	⑦ $\dfrac{1}{5}$	⑧ $\dfrac{1}{6}$
	⑨ $\dfrac{1}{8}$	ⓐ $\dfrac{3}{8}$	ⓑ $\dfrac{1}{12}$	ⓒ $\dfrac{5}{12}$

$\boxed{\mathbf{61}}$ の解答群

⓪　独立である　　　①　従属である（独立ではない）

②　独立とも従属ともいえない

計算用紙

問 3　サイコロを 1 回投げたとき，1 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ であるとする．このサイコロを初めて 1 の目が出るまで繰り返し投げたとき，その回数を表す確率変数を X とする．

(1)　X の確率分布は $P(X=k) = \boxed{\textbf{63}}$ $(k=1,2,\ldots)$ である．

(2)　サイコロを k 回投げて，一度も 1 の目が出ない確率は $P(X>k) = \boxed{\textbf{64}}$ であり，偶数回目に初めて 1 の目が出る確率は $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=2k) = \boxed{\textbf{65}}$ である．

(3)　初めて 1 の目が出るまで投げた回数の期待値は

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x|<1)$$

であることを用いると，$E(X) = \boxed{\textbf{66}}$ である．

$\boxed{\textbf{63}}$ ・ $\boxed{\textbf{64}}$ の解答群

⓪ $\frac{1}{6^{k-1}}$	① $\frac{1}{6^k}$	② $\frac{1}{6^{k+1}}$
③ $\frac{5}{6^{k-1}}$	④ $\frac{5}{6^k}$	⑤ $\frac{5}{6^{k+1}}$
⑥ $\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$	⑦ $\left(\frac{5}{6}\right)^{k}$	⑧ $\left(\frac{5}{6}\right)^{k+1}$
⑨ $\frac{5^{k-1}}{6^k}$	ⓐ $\frac{5^k}{6^{k+1}}$	ⓑ $\frac{6!}{k!(6-k)!} \cdot \frac{5^{6-k}}{6^k}$

$\boxed{\textbf{65}}$ ・ $\boxed{\textbf{66}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 6	④ 30
⑤ 36	⑥ $\frac{1}{2}$	⑦ $\frac{6}{5}$	⑧ $\frac{1}{6}$	⑨ $\frac{5}{6}$
ⓐ $\frac{5}{11}$	ⓑ $\frac{6}{11}$	ⓒ $\frac{6}{25}$	ⓓ $\frac{36}{25}$	ⓔ $\frac{25}{36}$

計算用紙

問 4 S 町では，毎年ある品種の柿(かき)を生産し，全国に出荷をしている．今年収穫した柿 1 個あたりの重さの平均を μ g とする．いま，何個かの柿を無作為に選びそれぞれの重さを測定したとき，μ の値に関する信頼度 95% の信頼区間について考える．柿 1 個あたりの重さは正規分布に従い，その標準偏差は 15 g であるとする．

まず，標本の個数を n とし，それぞれの重さを表す確率変数を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とすると，これらは互いに独立であり，いずれも正規分布 $N(\mu, 15^2)$ に従う．よって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

は正規分布 $N\left(\boxed{\textbf{67}}, \boxed{\textbf{68}}\right)$ に従う．そこで

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\boxed{\textbf{69}}}$$

とおけば，Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数である．正規分布表から

$$P(|Z| \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

であることがわかり

$$P\left(\overline{X} - \boxed{\textbf{70}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + \boxed{\textbf{70}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

を得る．これは，選んだ柿の重さがそれぞれ $x_1, x_2, \ldots, x_n$（単位：g）であれば，$\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ であり，μ の信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[\overline{x} - \boxed{\textbf{70}},\ \overline{x} + \boxed{\textbf{70}}\right]$$

となることを意味する．この信頼区間の幅は $2 \times \boxed{\textbf{70}}$ である．信頼度を変えずに標本の個数 n を 10 倍にすると信頼区間の幅は $\boxed{\textbf{71}}$ 倍になる．

$\boxed{\textbf{67}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② μ　③ 2μ　④ $n\mu$

⑤ $\dfrac{\mu}{n}$　⑥ μ^2　⑦ $2\mu^2$　⑧ $n\mu^2$　⑨ $\dfrac{\mu^2}{n}$

$\boxed{68}$・$\boxed{69}$ の解答群

⓪ 15	① 15^2	② $\sqrt{15}$	③ $15n$	④ 15^2n
⑤ $\sqrt{15}n$	⑥ $15n^2$	⑦ 15^2n^2	⑧ $15\sqrt{n}$	⑨ $\dfrac{15}{n}$
ⓐ $\dfrac{15^2}{n}$	ⓑ $\dfrac{15}{n^2}$	ⓒ $\dfrac{15^2}{n^2}$	ⓓ $\dfrac{15}{\sqrt{n}}$	ⓔ $\sqrt{\dfrac{15}{n}}$

$\boxed{70}$ の解答群

⓪ 0.025	① 0.05	② 5.88	③ 29.4	④ 58.8
⑤ $5.88n$	⑥ $29.4n$	⑦ $58.8n$	⑧ $\dfrac{5.88}{n}$	⑨ $\dfrac{29.4}{n}$
ⓐ $\dfrac{58.8}{n}$	ⓑ $\dfrac{5.88}{\sqrt{n}}$	ⓒ $\dfrac{29.4}{\sqrt{n}}$	ⓓ $\dfrac{58.8}{\sqrt{n}}$	

$\boxed{71}$ の解答群

⓪ 1	① 10	② 20	③ 100
④ $\dfrac{1}{5}$	⑤ $\dfrac{1}{10}$	⑥ $\dfrac{1}{50}$	⑦ $\dfrac{1}{100}$
⑧ $\sqrt{10}$	⑨ $2\sqrt{10}$	ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$	ⓑ $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$