EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2025年12月13日（土）
4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．
(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．
(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．
(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．
(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．
(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．
(8) 問題冊子は持ち帰ること．
(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\textbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ には $\boxed{\textbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\textbf{23}}$ は（$\boxed{\textbf{23}}$）という意味である．したがって，例えば $\boxed{\textbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2 - \boxed{\textbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

(6) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 〜 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{17}}$ 〕

問１ (1)　次の 3 つの極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x} = \boxed{\mathbf{1}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-x}{x^2} = \boxed{\mathbf{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \boxed{\mathbf{3}}$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{3}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ e
	⑤ $\dfrac{1}{2}$	⑥ $\dfrac{1}{3}$	⑦ $\dfrac{1}{6}$	⑧ $\dfrac{1}{e}$
	⑨ -1	ⓐ -2	ⓑ -3	ⓒ $-e$
	ⓓ $-\dfrac{1}{2}$	ⓔ $-\dfrac{1}{3}$	ⓕ $-\dfrac{1}{6}$	ⓖ $-\dfrac{1}{e}$

解説

(1)　ロピタルの定理を用いて

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+1}}{1}=1$$

となるから，$\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ① である．

次に，ロピタルの定理を 2 回用いて

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+1}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{(x+1)^2}}{2}=-\frac{1}{2}$$

となるから，$\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは ⓓ である．

さらに，ロピタルの定理を 3 回用いて

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-x+\dfrac{1}{2}x^2}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+1}-1+x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{1}{(x+1)^2}+1}{6x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{(x+1)^3}}{6}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

となるから，$\boxed{\mathbf{3}}$ の答えは ⑥ である．

(2)　n を自然数とする．定数 a_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ に対して

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(x+1) - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_{n-1} x^{n-1} - a_n x^n}{x^{n+1}}$$

が（有限な）極限値をもつのは $a_k = \boxed{\mathbf{4}}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ のときである．

$\boxed{\mathbf{4}}$ の解答群

⓪ k	① $\dfrac{1}{k}$	② $k!$	③ $\dfrac{1}{k!}$
④ $(-1)^k k$	⑤ $\dfrac{(-1)^k}{k}$	⑥ $(-1)^k k!$	⑦ $\dfrac{(-1)^k}{k!}$
⑧ $(-1)^{k-1} k$	⑨ $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$	ⓐ $(-1)^{k-1} k!$	ⓑ $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k!}$

解説

(2)　(1) の結果から

$$(*)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_{n-1}x^{n-1}-a_nx^n}{x^{n+1}}$$

が有限な極限値をもつのは $a_k=\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\quad(k=1,2,3,\ldots,n)$ のときであると予想できる．これを仮定して

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_{n-1}x^{n-1}-a_nx^n}{x^{n+1}}$$

が有限な極限値をもつのは $a_{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ のときであることを示す．ロピタルの定理を n 回用いると

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\log(x+1)-a_1x-a_2x^2-\cdots-a_nx^n-a_{n+1}x^{n+1}}{x^{n+2}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+1}-a_1-2a_2x-\cdots-na_nx^{n-1}-(n+1)a_{n+1}x^n}{(n+2)x^{n+1}}\\&=\cdots\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}-n!a_n-(n+1)!a_{n+1}x}{(n+2)(n+1)\times\cdots\times 3x^2}\end{aligned}$$

となる．$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ だから，$x\to 0$ のとき，分子と分母の極限はともに 0 となる．すると，さらにロピタルの定理を用いることができて

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}-n!a_n-(n+1)!a_{n+1}x}{(n+2)(n+1)\times\cdots\times 3x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{(-1)^n(n)!}{(x+1)^{n+1}}-(n+1)!a_{n+1}}{(n+2)(n+1)\times\cdots\times 2x}\end{aligned}$$

となる．これが有限な極限値をもつためには，$a_{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ でなければならない．したがって，任意の n に対して，$(*)$ が有限な極限値をもつのは $a_k=\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\quad(k=1,2,3,\ldots,n)$ のときであることが数学的帰納法により示された．よって，$\boxed{\mathbf{4}}$ の答えは ⑨ である．

問 2　広義積分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

を考える．

まず，半角の公式より，$2\cos^2\theta = \boxed{\textbf{5}}$ であるから

$$(*) \qquad \int 2\cos^2\theta\,d\theta = \boxed{\textbf{6}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

である．

次に，$\sqrt{1-x} = \sin\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta} = \boxed{\textbf{7}}$ であり，x と θ の対応は以下のようになる．

x	$0 \to 1-\varepsilon$
θ	$\dfrac{\pi}{2} \to \boxed{\textbf{8}}$

よって，$(*)$ を用いると

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\boxed{\textbf{8}}} \frac{|\cos\theta|}{\sin\theta} \boxed{\textbf{7}}\,d\theta = \boxed{\textbf{9}}$$

となる．

$\boxed{5}$ ～ $\boxed{7}$ の解答群

⓪ $1+\cos 2\theta$	① $1-\cos 2\theta$	② $1+\sin 2\theta$
③ $1-\sin 2\theta$	④ $1-2\cos^2\theta$	⑤ $\theta+2\cos 2\theta$
⑥ $\theta+2\sin 2\theta$	⑦ $\theta+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta$	⑧ $\theta+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$
⑨ $\cos 2\theta-1$	ⓐ $\sin 2\theta-1$	ⓑ $2\cos^2\theta-1$
ⓒ $2\cos\theta\sin\theta$	ⓓ $-2\cos\theta\sin\theta$	

$\boxed{8}$ ・ $\boxed{9}$ の解答群

⓪ $\sin^{-1}\varepsilon$	① $\sin^{-1}\sqrt{\varepsilon}$	② $\sin^{-1}(1-\varepsilon)$
③ $\sin^{-1}\sqrt{1-\varepsilon}$	④ $\dfrac{1}{\sin\varepsilon}$	⑤ $\dfrac{1}{\sin\sqrt{\varepsilon}}$
⑥ $\dfrac{1}{\sin(1-\varepsilon)}$	⑦ $\dfrac{1}{\sin\sqrt{1-\varepsilon}}$	⑧ 0
⑨ 1	ⓐ π	ⓑ 2π
ⓒ $\dfrac{\pi}{2}$	ⓓ $\dfrac{\pi}{4}$	

解説

広義積分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

を考える．

まず，半角の公式より，$2\cos^2\theta = 1+\cos 2\theta$ であるから

$$(*) \qquad \int 2\cos^2\theta\,d\theta = \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となる．よって，$\boxed{\textbf{5}}$，$\boxed{\textbf{6}}$ の答えは順に ⓪, ⑧ である．

次に，$\sqrt{1-x} = \sin\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta} = -2\cos\theta\sin\theta$ であり，x と θ の対応は以下のようになる．

x	$0 \to 1-\varepsilon$
θ	$\frac{\pi}{2} \to \sin^{-1}\sqrt{\varepsilon}$

したがって，$(*)$ を用いると

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon} \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\sin^{-1}\sqrt{\varepsilon}} \frac{|\cos\theta|}{\sin\theta} \times (-2\cos\theta\sin\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

となる．よって，$\boxed{\textbf{7}}$，$\boxed{\textbf{8}}$，$\boxed{\textbf{9}}$ の答えは順に ⓓ, ①, ⓒ である．

問 3 関数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\ ((x,y) \neq (0,0))$ を考える．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boxed{\textbf{10}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \boxed{\textbf{11}}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \boxed{\textbf{12}}$$

である．また，関数 $f(x,y)$ は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \boxed{\textbf{13}}$$

を満たす．

$\boxed{\textbf{10}}$ 〜 $\boxed{\textbf{12}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$　① $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$　② $-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

③ $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　④ $-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　⑤ $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

⑥ $\dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$　⑦ $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　⑧ $-\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

⑨ $\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$　ⓐ $-\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$　ⓑ $\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

ⓒ $-\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$　ⓓ $\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$　ⓔ $-\dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

ⓕ $\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$　ⓖ $-\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\boxed{\textbf{13}}$ の解答群

⓪ 0　① f　② $\dfrac{1}{f}$　③ $\sqrt{f}$　④ $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$

⑤ $-f$　⑥ $-\dfrac{1}{f}$　⑦ $-\sqrt{f}$　⑧ $-\dfrac{1}{\sqrt{f}}$

解説

これは偏微分の計算に関する問題である．まず，$u = x^2 + y^2$ とおいて $f(x, y) = \sqrt{u}$ に対して合成関数の微分法を用いると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d\sqrt{u}}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

となるので，$\boxed{\mathbf{10}}$ の答えは ① である．次に，商の微分法を用いると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

となるので，$\boxed{\mathbf{11}}$ の答えは ⓓ である．さらに，偏微分の順序を交換して計算すると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = x\frac{du^{-1/2}}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \left(-1/2u^{-3/2}\right) \cdot 2y = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

となるので，$\boxed{\mathbf{12}}$ の答えは ⓖ である．

最後に，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ の計算による結果と対称性により

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

となることと，$f = \sqrt{x^2 + y^2}$ に注意すると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{f}$$

であることがわかる．よって，$\boxed{\mathbf{13}}$ の答えは ② である．

問 4　重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dxdy$ の値を求める．ここで D は xy 平面内の集合

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leqq y \leqq 1,\ y \leqq x \leqq 1\}$$

である．積分順序を交換すると

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx \right) dy$$
$$= \int_0^1 \left(\int_{\boxed{\mathbf{14}}}^{\boxed{\mathbf{15}}} \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dy \right) dx$$

である．よって

$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dxdy = \int_0^1 \boxed{\mathbf{16}}\,dx = \boxed{\mathbf{17}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{14}}$ ・ $\boxed{\mathbf{15}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ x　④ y　⑤ $1-x$　⑥ $1-y$

$\boxed{\mathbf{16}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$　① $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$　② $\dfrac{1-x}{(1+x^2)^2}$　③ $\dfrac{y}{(1+x^2)^2}$

④ $\dfrac{1-y}{(1+x^2)^2}$　⑤ $\dfrac{1}{(1+x^2)^3}$　⑥ $\dfrac{x}{(1+x^2)^3}$　⑦ $\dfrac{1-x}{(1+x^2)^3}$

⑧ $\dfrac{y}{(1+x^2)^3}$　⑨ $\dfrac{1-y}{(1+x^2)^3}$

$\boxed{\mathbf{17}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{3}{4}$　④ $\dfrac{3}{8}$　⑤ $\dfrac{3}{16}$

⑥ -1　⑦ $-\dfrac{1}{2}$　⑧ $-\dfrac{3}{4}$　⑨ $-\dfrac{3}{8}$　ⓐ $-\dfrac{3}{16}$

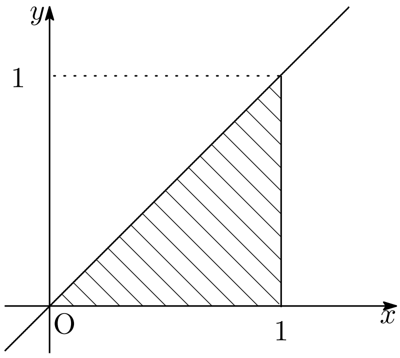
ⓑ y　ⓒ $\dfrac{y}{2}$　ⓓ $\dfrac{3y}{4}$　ⓔ $\dfrac{3y}{8}$　ⓕ $\dfrac{3y}{16}$

解説

問題の積分領域 D は，以下の図の斜線部なので

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\}$$

と書き直せる．



したがって，累次積分の積分順序を交換すると

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{1}{(1+x^2)^3}\, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{(1+x^2)^3}\, dy \right) dx$$

となる．よって， $\boxed{\textbf{14}}$ ， $\boxed{\textbf{15}}$ の答えは順に ⓪, ③ である．

さて，y についての積分 $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+x^2)^3}\, dy$ において， $\displaystyle\frac{1}{(1+x^2)^3}$ は y によらないので

$$\int_0^x \frac{1}{(1+x^2)^3}\, dy = \frac{1}{(1+x^2)^3} \int_0^x 1\, dy = \frac{1}{(1+x^2)^3}\, [y]_0^x = \frac{x}{(1+x^2)^3}$$

となる．したがって

$$\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{(1+x^2)^3}\, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}\, dx$$

であるから， $\boxed{\textbf{16}}$ の答えは ⑥ である．また，$t = 1 + x^2$ とおくと $\displaystyle\frac{1}{2} dt = x dx$ だから

$$\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{4} [t^{-2}]_1^2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right) = \frac{3}{16}$$

となる．よって， $\boxed{\textbf{17}}$ の答えは ⑤ である．

第 2 分野　線形代数

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{18}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{35}}$ 〕

(注意) 行列 A に対し，$\operatorname{rank} A$ は A の階数（ランク）を表す.

問 1 (1) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

とする．このとき行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\mathbf{18}}$ である.

(2) 行列 B を

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．このとき行列式 $|B|$ の値は $\boxed{\mathbf{19}}$ である．よって B は逆行列をもつ.
逆行列 B^{-1} の $(1,4)$ 成分は $\boxed{\mathbf{20}}$ である.

$\boxed{\mathbf{18}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{20}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7　⑧ 8

⑨ −1　ⓐ −2　ⓑ −3　ⓒ −4　ⓓ −5　ⓔ −6　ⓕ −7　ⓖ −8

解説

(1) 基本変形を用いて計算すると

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -4 & 12 \\ 0 & 3 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= (-4)\cdot(-7) - 12\cdot 3 = -8$$

となる．ここで，2 つめの等号では (第 2 行)+3×(第 1 行) および (第 3 行)−2×(第 3 行) の基本変形を行った．よって， $\boxed{\mathbf{18}}$ の答えは ⓖ である．

（別解）サラスの公式を用いて計算すると

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 3\cdot 2 + 3\cdot(-1)\cdot(-3)$$

$$- 3\cdot 2\cdot 2 - (-2)\cdot(-3)\cdot(-1) - 1\cdot(-1)\cdot 3$$

$$= -8$$

(2) B の第 1 列に 0 の成分が多いことに着目して，第 1 列に関する余因子展開を適用すると

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

を得る．右辺第 1 項の行列式を求めると

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -(7\cdot(-1) - 3\cdot(-3)) = -2$$

となる．ここで，2 つめの等号で (第 1 列)+5×(第 2 列) の基本変形を行った．また，右辺第 2 項の行列式は (1) の結果から -8 である．以上より

$$|B| = 2\cdot(-2) - (-8) = 4$$

となり， $\boxed{\mathbf{19}}$ の答えは ④ である．

$|B| \neq 0$ であるから B は逆行列をもつ．逆行列 B^{-1} は余因子行列を使って表すことができる．まず B の (i,j) 余因子 B_{ij} は，B の i 行と j 列を取り除いた $n-1$ 次の小行列式を D_{ij} としたとき

$$B_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

で定義される．これを用いると，逆行列 B^{-1} は

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji})$$

で与えられる．この式から B^{-1} の $(1,4)$ 成分は

$$\frac{1}{|B|}B_{41} = \frac{1}{|B|}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\cdot(-1)\cdot(-8) = 2$$

と求まる．よって，$\boxed{\mathbf{20}}$ の答えは ② である．

問 2　座標空間内に 4 点 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(3,-1,1)$, $\mathrm{B}(-1,2,2)$, $\mathrm{C}(-4,-7,t)$ がある．ただし，t は実数とする．また，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

(1)　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が 1 次従属（線形従属）になるのは $t=$ $\boxed{\textbf{21}}$ のときである．このとき $\boldsymbol{c}=$ $\boxed{\textbf{22}}$ $\boldsymbol{a}+$ $\boxed{\textbf{23}}$ $\boldsymbol{b}$ と表すことができる．

(2)　$\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の両方と直交するのは $t=$ $\boxed{\textbf{24}}$ のときである．

(3)　3 点 O, A, B を通る平面を α とする．平面 α 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ で表すと，$\boxed{\textbf{25}}$ が成り立つ．

$\boxed{\textbf{21}}$ ～ $\boxed{\textbf{24}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ -4　ⓑ -5　ⓒ -6

ⓓ -9　ⓔ -11　ⓕ -13　ⓖ -15

$\boxed{\textbf{25}}$ の解答群

⓪ $x+2y+5z=0$　① $x+2y-5z=0$

② $-x+2y+2z=0$　③ $-x+2y-7z=0$

④ $3x-y+z=0$　⑤ $3x-y-4z=0$

⑥ $-4x-7y+z=0$　⑦ $-4x-7y-z=0$

⑧ $-4x-7y+5z=0$　⑨ $-4x-7y-5z=0$

ⓐ $-4x-7y+13z=0$　ⓑ $-4x-7y-13z=0$

解説

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を並べてできる行列を $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$ とする．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立であるための必要十分条件は $\operatorname{rank} A = 3$ である．言い換えると，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次従属であるための必要十分条件は $\operatorname{rank} A < 3$ である．そこで A に行基本変形を施し，階数を求める．

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{第 1 行})\leftrightarrow(\text{第 3 行})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ -1 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(\text{第 3 行})+(-3)\times(\text{第 1 行})]{(\text{第 2 行})+(\text{第 1 行})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 0 & 4 & t-7 \\ 0 & -7 & -3t-4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(\text{第 3 行})\times 4]{(\text{第 2 行})\times 7} \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 0 & 28 & 7t-49 \\ 0 & -28 & -12t-16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(\text{第 3 行})+(\text{第 2 行})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 0 & 28 & 7t-49 \\ 0 & 0 & -5t-65 \end{pmatrix}$$

これより，$\operatorname{rank} A < 3$ となるのは $t = -13$ のときであることがわかる．よって，$\boxed{\textbf{21}}$ の答えは ⓕ である．

次に $\boldsymbol{c} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$ となるような x, y を求める．このような x, y は，連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすのでこれを解けばよい．上の行基本変形の結果に $t = -13$ を代入し，第 2 行を 1/14 倍すると，x, y は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -13 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすことがわかる．これを解くと $x = -3, y = -5$ を得る．よって，$\boxed{\textbf{22}}$，$\boxed{\textbf{23}}$ の答えは順に ⑨, ⓑ である．

(2) $\boldsymbol{c}$ が $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の両方と直交するのは

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} = 0$$

のときである．内積を計算すると

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=(-4)\cdot3+(-7)\cdot(-1)+t\cdot1=t-5,\quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=(-4)\cdot(-1)+(-7)\cdot2+t\cdot2=2t-10$$

となるから，これらが 0 になるのは $t=5$ のときである．よって，$\boxed{\textbf{24}}$ の答えは ⑤ である．

(3) 平面 α は原点 O を通るので，α 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ の位置ベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ は，α に垂直なベクトル（法線ベクトル）と直交する．(2) より，$t=5$ とおいたときの $\boldsymbol{c}$，すなわちベクトル $\begin{pmatrix}-4\\-7\\5\end{pmatrix}$ は平面 α の法線ベクトルとなるから

$$-4x-7y+5z=0$$

が成り立つ．よって，$\boxed{\textbf{25}}$ の答えは ⑧ である．

問 3　2 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ における線形変換について考える．

(1)　2 次正方行列 M が

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

をすべてのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ について満たすとする．このとき $M =$ **26**

である．また，行列 M が表す線形変換は，xy 平面における x 軸に関する対称移動である．

(2)　$-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対して

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

とおく．この行列が表す線形変換は，xy 平面における原点を中心とする角 θ の回転である．ただし，反時計回りを正とする．このとき

$$R_\theta M R_{-\theta} = \boxed{\mathbf{27}}$$

がすべての θ について成り立つ．また，行列 **27** が表す線形変換は，原点を中心とする回転と x 軸に関する対称移動の合成であることに注意すると，xy 平面における **28** であることがわかる．

26 **の解答群**

⓪ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$　② $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　④ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

⑥ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　⑧ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{27}}$ の解答群

⓪ $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$　① $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$　③ $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

④ $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$　⑤ $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$

⑥ $\begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$　⑦ $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{28}}$ の解答群

⓪ 原点を中心とする角 θ の回転

① 原点を中心とする角 $-\theta$ の回転

② 原点を中心とする角 2θ の回転

③ 原点を中心とする角 -2θ の回転

④ 直線 $y = (\tan\theta)x$ に関する対称移動

⑤ 直線 $y = -(\tan\theta)x$ に関する対称移動

⑥ 直線 $y = (\tan 2\theta)x$ に関する対称移動

⑦ 直線 $y = -(\tan 2\theta)x$ に関する対称移動

解説

(1) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく．すべてのベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ について成り立つ等式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

において，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．これより $a = 1, c = 0$ を得る．次に $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる．これより $b = 0, d = -1$ を得る．以上より $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ となる．よって，$\boxed{\mathbf{26}}$ の答えは ② である．

(2)

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

を用いて計算すると

$$\begin{aligned} R_\theta M R_{-\theta} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る．よって，$\boxed{\mathbf{27}}$ の答えは ⑦ である．

この行列 $R_\theta M R_{-\theta}$ をベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に左からかけると，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $R_{-\theta}$ により原点を中心とする角 $-\theta$ の回転，M により x 軸に関する対称移動，R_θ により原点を中心とする角 θ の回転の変換を順に受ける．これは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が直線 $y = (\tan\theta)x$ に関する対称移動の変換を受けることを意味する．よって，$\boxed{\mathbf{28}}$ の答えは ④ である．

問 4　連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} x + 2y - 5z = -1 \\ \qquad\ \ y - 3z = -2 \\ 2x + 2y - 4z = a \end{cases}$$

を考える．ただし，a は定数とする．この方程式の係数行列 A，拡大係数行列 B は

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & a \end{pmatrix}$$

である．

(1)　$\operatorname{rank} A = \boxed{\textbf{29}}$ である．

(2)　$a \neq \boxed{\textbf{30}}$ のとき，$\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} B$ である．よって，方程式 $(*)$ は $\boxed{\textbf{31}}$．

(3)　$a = \boxed{\textbf{30}}$ のとき，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ である．このとき方程式 $(*)$ の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{32}} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad （t \text{ は任意定数}）$$

と表すことができる．

29 ・ 30 ・ 32 の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7

⑧ −1　⑨ −2　ⓐ −3　ⓑ −4　ⓒ −5　ⓓ −6　ⓔ −7

31 の解答群

⓪ 解をもたない　① ただ 1 組の解をもつ

② ちょうど 2 組の解をもつ　③ ちょうど 3 組の解をもつ

④ 無数の解をもつ

解説

拡大係数行列 B に行基本変形を施して簡約階段行列まで変形すると次のようになる．

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & -4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{第 } 3 \text{ 行}) - 2\times(\text{第 } 1 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(\text{第 } 1 \text{ 行}) - 2\times(\text{第 } 2 \text{ 行})]{(\text{第 } 3 \text{ 行}) + 2\times(\text{第 } 2 \text{ 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

(1) A に対して上と同じ行基本変形を施すと

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となることがわかる．よって，$\operatorname{rank} A = 2$ であり，$\boxed{\textbf{29}}$ の答えは ② である．

(2) 上の B についての行基本変形の結果から，$\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} B$ となるのは $a \neq 2$ の場合であることがわかる．よって，$\boxed{\textbf{30}}$ の答えは ② である．また，このとき方程式 $(*)$ は解をもたない．よって，$\boxed{\textbf{31}}$ の答えは ⓪ である．

(3) $a = 2$ のとき，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ となるので，この場合は方程式 $(*)$ の解が存在する．いま $\operatorname{rank} B = 2$ が未知数の個数 3 よりも小さいので，無数の解が存在する．すべての解を求めるには，簡約階段行列の主成分のある列以外の変数（いまの場合は z）を任意定数 t とおいた後，x と y を求めればよい．すなわち，$z = t$（t は任意定数）とおくと，上の簡約階段行列に対応する連立一次方程式は

$$\begin{cases} x \phantom{{}+y} + t = 3 \\ \phantom{x+{}} y - 3t = -2 \end{cases}$$

となるので，これから x, y を求めると，$x = 3 - t, y = -2 + 3t$ となる．以上より，方程式 $(*)$ の解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\ t \text{ は任意定数}\ )$$

となる．よって，$\boxed{\textbf{32}}$ の答えは ⑧ である．

問 5　行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値が 3（重複度 2）と -2 であるとする．ただし，a は定数とする．

(1)　このとき $a = \boxed{\mathbf{33}}$ である．

(2)　固有値 3 に対応する A の固有ベクトルとして $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \boxed{\mathbf{34}} \end{pmatrix}$ がとれる．

この $\boldsymbol{p}$ に対して

$$(A^3 - 2A^2 - A)\boldsymbol{p} = \boxed{\mathbf{35}}\,\boldsymbol{p}$$

が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{33}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{35}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ 6	⑦ 7
	⑧ -1	⑨ -2	ⓐ -3	ⓑ -4	ⓒ -5	ⓓ -6	ⓔ -7

解説

(1) A の固有値を求める．I を 3 次の単位行列として，$|\lambda I - A|$ を計算すると

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -a & 3 \\ 1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda-a & -\lambda^2+2\lambda+3 \\ 0 & \lambda-1 & -\lambda+3 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \lambda-a & -\lambda^2+2\lambda+3 \\ \lambda-1 & -\lambda+3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \lambda-a & (\lambda-3)(\lambda+1) \\ \lambda-1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-a & \lambda+1 \\ \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda^2-\lambda-1+a)$$

となる．ここで 2 つめの等号では (第 2 行)−(第 3 行) および (第 1 行)−$\lambda\times$(第 3 行) の基本変形を行った．A の固有値が 3 （重複度 2）と -2 であることから，上式は $(\lambda-3)^2(\lambda+2)$ に一致している必要がある．このことから $a=-5$ がしたがう．よって，$\boxed{\mathbf{33}}$ の答えは ⓒ である．

(2) 固有値 3 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ を求める．固有値・固有ベクトルの定義から，$\boldsymbol{p}$ は

$$A\boldsymbol{p} = 3\boldsymbol{p}$$

を満たす 0 でないベクトルである．$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおくと，これは連立一次方程式

$$(3I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解である．これを解くため，$3I - A$ に行基本変形を施すと

$$3I - A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{第 1 行})\leftrightarrow(\text{第 2 行})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(\text{第 3 行})-(\text{第 1 行})]{(\text{第 2 行})-3\times(\text{第 1 行})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{第 2 行})\times 1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(\text{第 3 行})-2\times(\text{第 2 行})]{(\text{第 1 行})-(\text{第 2 行})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る．したがって，$\boldsymbol{p}$ は連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解として求まり，t を 0 でない任意定数として

$$\boldsymbol{p} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる．特に，$t = 1$ と選ぶと固有ベクトルとして $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ がとれることになる．よって，$\boxed{\textbf{34}}$ の答えは ⑧ である．

また，$\boldsymbol{p}$ は $A\boldsymbol{p} = 3\boldsymbol{p}$ を満たすことから，$A^2\boldsymbol{p} = A(3\boldsymbol{p}) = 3A\boldsymbol{p} = 9\boldsymbol{p}$ となる．同様にして $A^3\boldsymbol{p} = 27\boldsymbol{p}$ も得られる．したがって

$$(A^3 - 2A^2 - A)\boldsymbol{p} = 27\boldsymbol{p} - 2 \cdot 9\boldsymbol{p} - 3\boldsymbol{p} = 6\boldsymbol{p}$$

となる．よって，$\boxed{\textbf{35}}$ の答えは ⑥ である．

第3分野　常微分方程式

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{36}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{53}}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．すべての微分方程式は関数が定義される範囲で考える．また，特殊解は特解ともいう．

問 1 変数分離形の微分方程式

$$(*) \qquad (1+2x)y' = 3 + y$$

を $x > 0$ の範囲で考える．この一般解は任意定数 C を用いて

$$y = \boxed{\mathbf{36}} + C \cdot \boxed{\mathbf{37}}$$

と表される．

さらに，方程式 $(*)$ の解 $y = y(x)$ が初期条件 $y\left(\dfrac{3}{2}\right) = 3$ を満たすとき

$$y = \boxed{\mathbf{36}} + \boxed{\mathbf{38}} \cdot \boxed{\mathbf{37}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{36}}$ ・ $\boxed{\mathbf{38}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -3　⑨ -4　ⓐ -5

$\boxed{\mathbf{37}}$ の解答群

⓪ $1+x$　① $2+x$　② $1+2x$

③ $\sqrt{1+x}$　④ $\sqrt{2+x}$　⑤ $\sqrt{1+2x}$

⑥ $1+\sqrt{x}$　⑦ $2+\sqrt{x}$　⑧ $1+\sqrt{2x}$

解説

本問の微分方程式は変数分離形である．

(1) $y' = \dfrac{dy}{dx}$ であるので

$$\frac{1}{3+y}dy = \frac{1}{1+2x}dx$$

となる．両辺を積分すると

$$\int \frac{1}{3+y}dy = \int \frac{1}{1+2x}dx$$

より

$$\log|3+y| = \frac{1}{2}\log(1+2x) + C_1 \quad (C_1\text{は任意定数})$$

である．さらに計算して

$$|3+y| = e^{C_1}\sqrt{1+2x}$$

を得る．ここで，$C = \pm e^{C_1}$ とおくと，C は 0 以外の任意の値をとる．すると，$(*)$ の一般解

$$y = -3 + C\sqrt{1+2x}$$

が得られる．また，定数関数 $y \equiv -3$ も解であることに注意すれば，C は（0 を含む）任意定数となる．よって，$\boxed{\mathbf{36}}$，$\boxed{\mathbf{37}}$ の答えは順に ⑧, ⑤ である．

(2) 初期条件 $y\left(\dfrac{3}{2}\right) = 3$ を満たす方程式 $(*)$ の解は

$$3 = -3 + C\cdot\sqrt{1+2\cdot\frac{3}{2}}$$

より $C = 3$ であるから

$$y = -3 + 3\cdot\sqrt{1+2x}$$

である．よって，$\boxed{\mathbf{38}}$ の答えは ③ である．

問 2　解答群にある微分方程式の中から，以下の文章にあてはまるものをそれぞれ 1 つ選べ.

(1)　関数 $y = \dfrac{1}{2}x^3 + x - \dfrac{5}{8}$ を解としてもつ微分方程式は $\boxed{\textbf{39}}$ である.

(2)　関数 $y = 7\sin\sqrt{3}x$ を解としてもつ微分方程式は $\boxed{\textbf{40}}$ である.

(3)　関数 $y = 2e^{3x}$ を解としてもつが，$y = -e^{-x}$ を解としてもたない微分方程式は $\boxed{\textbf{41}}$ である.

$\boxed{\textbf{39}}$ 〜 $\boxed{\textbf{41}}$ の解答群

⓪ $y'' + 3x = 0$　　① $y'' - 3x = 0$

② $y'' + 3y = 0$　　③ $y'' - 3y = 0$

④ $y'' + 3y' = 0$　　⑤ $y'' - 3y' = 0$

⑥ $y'' - 2y' + 3y = 0$　　⑦ $y'' - 2y' - 3y = 0$

解説

本問は与えられた関数が解となる微分方程式を選ぶ問題である．本分野の問題は，与えられた常微分方程式を満たす未知関数を求めることが多いため，少し趣が異なることに注意しよう．まず，選択肢を見るとそれらはすべて 2 階常微分方程式であることがわかる．このことから，各設問における関数から第 2 次までの導関数を求め，選択肢にある常微分方程式を満たすか判定すればよい．

(1) $y = \dfrac{1}{2}x^3 + x - \dfrac{5}{8}$ より

$$y' = \frac{3}{2}x^2 + 1, \quad y'' = 3x$$

となる．y'' の式から $y'' - 3x = 0$ が導ける．その他の選択肢に y, y', y'' の式を代入しても明らかに該当するものはないため，$\boxed{\mathbf{39}}$ の答えは ① である．

(2) $y = 7\sin\sqrt{3}x$ より

$$y' = 7\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x, \quad y'' = -21\sin\sqrt{3}x$$

となる．y'' の式の右辺は $-21\sin\sqrt{3}x = -3 \cdot 7\sin\sqrt{3}x = -3y$ と表せるため，$y'' + 3y = 0$ が導ける．その他の選択肢に y, y', y'' の式を代入しても明らかに該当するものはないため，$\boxed{\mathbf{40}}$ の答えは ② である．

(3) 2 つの関数 $y = 2e^{3x}, y = -e^{-x}$ について考える．まず，$y = 2e^{3x}$ に対して第 2 次までの導関数を求めると

$$y' = 6e^{3x}, \quad y'' = 18e^{3x}$$

となる．最初の関数の y'' の式の右辺から $18e^{3x} = 3 \cdot 6e^{3x} = 3y'$ と表せる．したがって，$y'' - 3y' = 0$ が導ける．その他の選択肢に y, y', y'' の式を代入してみると，⑦ において

$$y'' - 2y' - 3y = 18e^{3x} - 2 \cdot 6e^{3x} - 3 \cdot 2e^{3x} = 0$$

となることから，関数 $y = 2e^{3x}$ は常微分方程式 $y'' - 2y' - 3y = 0$ の解ともなることがわかる．一方，$y = -e^{-x}$ より

$$y' = e^{-x}, \quad y'' = -e^{-x}$$

を 2 つの常微分方程式の左辺に代入すると

$$y'' - 3y' = -e^{-x} - 3 \cdot e^{-x} = -4e^{-x} \neq 0$$

$$y'' - 2y' - 3y = -e^{-x} - 2 \cdot e^{-x} - 3 \cdot (-e^{-x}) = 0$$

となる．問題文から $y=-e^{-x}$ が解とはならない常微分方程式を求めるので，該当するものは $y''-3y'=0$ である．よって， $\boxed{\textbf{41}}$ の答えは ⑤ である．

本解説では与えられた式を用いて選択肢の常微分方程式に直接代入し適当な方程式を選ぶ方法を解説した．その他の方法として，選択肢にある常微分方程式はすべて 2 階線形常微分方程式であるため，その解法を用いて各選択肢の一般解を求め，各設問の関数に該当する選択肢を選ぶ方法もある．計算力を強化するためにも，この方法でも解答を試みてほしい．

問 3 微分方程式

$$(*) \qquad xy' + y = 3xy^2$$

を $x > 0$ の範囲で考える．

(1) まず $y(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ とおくと，方程式 $(*)$ は u に関する 1 階線形微分方程式

$$(**) \qquad u' + \boxed{\mathbf{42}} = -3$$

となる．$(**)$ に対応する同次方程式 $u' + \boxed{\mathbf{42}} = 0$ の一般解は，任意定数 C_1 を用いて

$$({}^{*}_{**}) \qquad u = \boxed{\mathbf{43}}$$

と表される．

$\boxed{\mathbf{42}}$ **の解答群**

⓪ x	① $-x$	② xu	③ $-xu$	④ $\dfrac{1}{x}$	⑤ $-\dfrac{1}{x}$
⑥ $\dfrac{1}{x}u$	⑦ $-\dfrac{1}{x}u$	⑧ $\dfrac{1}{x^2}$	⑨ $-\dfrac{1}{x^2}$	ⓐ $\dfrac{1}{x^2}u$	ⓑ $-\dfrac{1}{x^2}u$

$\boxed{\mathbf{43}}$ **の解答群**

⓪ $x + C_1$	① $C_1 x$	② $x^2 + C_1$	③ $\sqrt{x} + C_1$
④ $C_1\sqrt{x}$	⑤ $C_1 x + 3$	⑥ $C_1\sqrt{x} + 3$	⑦ $C_1 x^2$

(2) $({}^{*}_{**})$ において，C_1 を x の関数 $v(x)$ と置き換えて，$(**)$ に代入すると

$$v' = \boxed{\mathbf{44}}$$

となる．これを解けば

$$v = \boxed{\mathbf{45}} + C_2 \quad (C_2 \text{ は任意定数})$$

である．したがって，$(**)$ の一般解は

$$u = \boxed{\mathbf{46}}$$

となり，$(*)$ の一般解は $y = \dfrac{1}{\boxed{\mathbf{46}}}$ である．

$\boxed{\mathbf{44}}$ の解答群

⓪ $-\dfrac{x}{3}$　① $\dfrac{x}{3}$　② $-\dfrac{3}{x}$　③ $\dfrac{3}{x}$

④ $-3x$　⑤ $3x$　⑥ $-x-3$　⑦ $x-3$

$\boxed{\mathbf{45}}$ の解答群

⓪ $-\dfrac{1}{3}\log x$　① $\dfrac{1}{3}\log x$　② $-\log x$　③ $\log x$

④ $-3\log x$　⑤ $3\log x$　⑥ $-\log 3x$　⑦ $\log 3x$

$\boxed{\mathbf{46}}$ の解答群

⓪ $x\sqrt{x+C_2}$　① $x\left(\sqrt{2\log x}+C_2\right)$　② $x(\log x+C_2)$

③ $x\sqrt{\log x+C_2}$　④ $x(-x+C_2)$　⑤ $x\sqrt{-\log x+C_2}$

⑥ $x(-3\log x+C_2)$　⑦ $x(3\log x+C_2)$　⑧ $\log x+C_2$

解説

本問はベルヌーイの微分方程式に関する問題である．

(1)　まず $y(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ とおくと

$$u(x) = \frac{1}{y\,(x)}$$

である．両辺を x で微分することで得られる

$$u' = -\frac{1}{y^2}y'$$

を式 $(*)$ に代入すると

$$-y^2u' + \frac{1}{x}y = 3y^2$$

が得られる．これを変形すると

$$u' - \frac{1}{x}u = -3$$

が得られる．よって，$\boxed{\textbf{42}}$ の答えは ⑦ である．

次に $(**)$ に対応する同次方程式 $u' - \dfrac{1}{x}u = 0$ の一般解を求める．これを

$$\frac{1}{u}du = \frac{1}{x}dx$$

と変形して両辺を積分すると $\log|u| = \log|x| + C'$ (C' は任意定数)．ここで $C_1 = \pm e^{C'}$ とおけば，$u' - \dfrac{1}{x}u = 0$ の一般解

$$u = C_1 x \qquad (C_1\text{は任意定数})$$

が得られる．よって，$\boxed{\textbf{43}}$ の答えは ① である．

(2)　$({}_*{}^*{}_*)$ において C_1 を x の関数 $v(x)$ と置き換えて $(**)$ に代入すると

$$v'x + v - \frac{1}{x}vx = -3$$

すなわち

$$v' = -\frac{3}{x}$$

である．よって，$\boxed{\textbf{44}}$ の答えは ② である．これを解いて

$$v = -3\log x + C_2 \quad (C_2\text{は任意定数})$$

が得られる．よって，$\boxed{\mathbf{45}}$ の答えは ④ である．

また v を $u = C_1 x = vx$ に代入して

$$u = x\left(-3\log x + C_2\right)$$

が得られる．ここで $y = \dfrac{1}{u}$ であるから，$(**)$ の一般解は

$$y = \frac{1}{x\left(-3\log x + C_2\right)}$$

である．よって，$\boxed{\mathbf{46}}$ の答えは ⑥ である．

問 4　微分方程式

$$(*) \qquad y'' + ay' + 4y = e^{bx}$$

について考える．ここで a, b は定数で，$b \neq 0$ とする．

(1)　$a =$ $\boxed{\mathbf{47}}$ のとき，$(*)$ に対応する同次方程式

$$y'' + ay' + 4y = 0$$

の一般解 y_h は任意定数 C_1, C_2 を用いて

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$$

と表される．

(2)　$a =$ $\boxed{\mathbf{47}}$ のとき，$(*)$ が $y_p = K\,e^{bx}$ (K は定数) の形の特殊解をもつのは

$$b \neq \boxed{\mathbf{48}}$$

の場合である．このとき，$K =$ $\boxed{\mathbf{49}}$ となる．したがって，$(*)$ の一般解は

$$y = y_h + y_p = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \boxed{\mathbf{49}}\, e^{bx}$$

である．

$\boxed{47}$・$\boxed{48}$ の解答群

⓪ 0				
① 1	② 2	③ 4	④ 8	⑤ 16
⑥ -1	⑦ -2	⑧ -4	⑨ -8	ⓐ -16

$\boxed{49}$ の解答群

⓪ b	① $2b$	② $4b$	③ $(b-2)^2$	④ $(b-4)^2$
⑤ $\dfrac{1}{b}$	⑥ $\dfrac{1}{2b}$	⑦ $\dfrac{1}{4b}$	⑧ $\dfrac{1}{(b-2)^2}$	⑨ $\dfrac{1}{(b-4)^2}$

解説

(1) $C_1 = 1, C_2 = 0$ のとき，$y_h = e^{2x}$ である．y_h の 1 階および 2 階の導関数を求めると

$$y_h' = 2e^{2x}, \quad y_h'' = 4e^2x$$

を得る．これを同次方程式に代入すると

$$4e^{2x} + 2ae^{2x} + 4e^{2x} = 0$$

となる．すなわち

$$8 + 2a = 0$$

であるので，$a = -4$ となる．よって，$\boxed{\textbf{47}}$ の答えは ⑧ である．

(2) まず $K \neq 0$ であることに注意する．

$a = -4$ のとき，$(*)$ が $y_p = K\,e^{bx}$ (K は定数) の形の特殊解をもつのは，$b \neq 2$ の場合である．$b = 2$ のとき，$(*)$ の左辺が 0 になり方程式を満たさないため，特殊解は Ke^{2x} の形では存在しない．

実際に，y_p の 1 階および 2 階の導関数を求めて $(*)$ に代入すると

$$Kb^2e^{bx} - 4Kbe^{bx} + 4Ke^{bx} = e^{bx}$$

となる．この式の両辺を e^{bx} で割ると

$$K(b-2)^2 = 1$$

となる．したがって，$b \neq 2$ のとき，$(*)$ が $y_p = K\,e^{bx}$ (K は定数) の形の特殊解をもち，

$$K = \frac{1}{(b-2)^2}$$

と一意に定まる．以上より，$(*)$ の一般解は

$$y = y_h + y_p = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{(b-2)^2}e^{bx}$$

である．よって，$\boxed{\textbf{48}}$，$\boxed{\textbf{49}}$ の答えは順に ②, ⑧ である．

問 5　関数 $y = y(x)$ $\left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}\right)$ は微分方程式

$$(*) \qquad y'' = 1 + 4(y')^2$$

の解で初期条件 $y(0) = y'(0) = 0$ を満たすものとする．

(1)　$z = y'$ とおくと，$(*)$ は $z(x)$ に関する変数分離形微分方程式

$$z' = 1 + 4z^2$$

となる．これを解けば，ある定数 C_1 を用いて

$$(**) \qquad \boxed{\mathbf{50}} = 2x + C_1$$

が得られる．

$\boxed{\mathbf{50}}$ **の解答群**

⓪ $z + \frac{4}{3}z^3$	① $2z + \frac{8}{3}z^3$	② $\log(1 + 4z^2)$
③ $\frac{1}{\tan 2z}$	④ $\tan^{-1} 2z$	⑤ $2\tan^{-1} 2z$
⑥ $\frac{1}{\sin 2z}$	⑦ $\sin^{-1} 2z$	⑧ $2\sin^{-1} 2z$
⑨ $\frac{1}{\cos 2z}$	ⓐ $\cos^{-1} 2z$	ⓑ $2\cos^{-1} 2z$

(2)　$z(0) = y'(0) = 0$ より，$(**)$ において $C_1 = \boxed{\mathbf{51}}$ となる．このとき

$$y' = z = \boxed{\mathbf{52}}$$

であるから，ある定数 C_2 を用いて

$$y = \int \boxed{\mathbf{52}}\, dx = \boxed{\mathbf{53}} + C_2$$

と表される．さらに，条件 $y(0) = 0$ より $C_2 = 0$ となり

$$y = \boxed{\mathbf{53}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{51}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② -1　③ 2　④ -2

⑤ $\dfrac{\pi}{2}$　⑥ $-\dfrac{\pi}{2}$　⑦ π　⑧ $-\pi$

$\boxed{\mathbf{52}}$・$\boxed{\mathbf{53}}$ の解答群

⓪ $\sin 2x$　① $\dfrac{1}{2}\sin 2x$　② $\cos 2x$

③ $\dfrac{1}{2}\cos 2x$　④ $\tan 2x$　⑤ $\dfrac{1}{2}\tan 2x$

⑥ $\dfrac{1}{\cos 2x}$　⑦ $-\dfrac{1}{\cos 2x}$　⑧ $\dfrac{1}{2}\log(\cos 2x)$

⑨ $-\dfrac{1}{2}\log(\cos 2x)$　ⓐ $\dfrac{1}{4}\log(\cos 2x)$　ⓑ $-\dfrac{1}{4}\log(\cos 2x)$

ⓒ $\log(\cos 2x)$　ⓓ $-\log(\cos 2x)$

解説

(1)　微分方程式 $(*)$ は，$z = y'$ とおくと

$$z' - 4z^2 = 1$$

と表せて，これは z に関する変数分離形微分方程式である．変数分離して積分すると

$$\int \frac{1}{1+4z^2}\,dz = \int dx$$

となる．したがって，任意定数 C_0 を用いて，変数分離形微分方程式の一般解は

$$\frac{1}{2}\tan^{-1} 2z = x + C_0$$

である．$C_1 = 2C_0$ とすると，$\tan^{-1} 2z = 2x + C_1$ となる．よって，$\boxed{\mathbf{50}}$ の答えは ④ である．

(2)　$z(0) = y'(0) = 0$ であるから，$(**)$ に代入して $C_1 = 0$ となり，$\tan^{-1} 2z = 2x$ となる．逆三角関数の定義から $2z = \tan 2x$ と表せるので

$$y' = z = \frac{1}{2}\tan 2x$$

と書ける．よって，$\boxed{\mathbf{51}}$，$\boxed{\mathbf{52}}$ の答えは順に ⓪, ⑤ である．上式について直接積分すれば

$$y = \frac{1}{2}\int \tan 2x\,dx = -\frac{1}{4}\log|\cos 2x| + C_2$$

を得る．特に，$-\dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{4}$ のとき $\cos 2x > 0$ であるから

$$y = -\frac{1}{4}\log(\cos 2x) + C_2$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{53}}$ の答えは ⓑ である．

さらに，条件 $y(0) = 0$ より

$$0 = -\frac{1}{4}\log(\cos 0) + C_2$$

であるから，$C_2 = 0$ となり

$$y = -\frac{1}{4}\log(\cos 2x)$$

である．

第4分野　確率・統計

〔 問 1 ～ 問 4 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{54}}$ ～ $\boxed{\mathbf{69}}$ 〕

(注意) 事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$，$V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す．

問 1　(1)　確率変数 X, Y が独立で，確率分布がともに

X の値（Y の値）	-4	-1	0	2	3
確率	$\dfrac{1}{12}$	$\dfrac{1}{6}$	a	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{3}$

(a は定数)

で与えられているとき

$$E(X) = E(Y) = \boxed{\mathbf{54}}, \quad V(X) = V(Y) = \boxed{\mathbf{55}}$$

である．また

$$V\left(\frac{X+2Y}{3}\right) = \boxed{\mathbf{56}}$$

である．

$\boxed{\mathbf{54}}$ ～ $\boxed{\mathbf{56}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

⑥ $\dfrac{1}{2}$　⑦ $\dfrac{3}{2}$　⑧ $\dfrac{5}{2}$　⑨ $\dfrac{7}{2}$　ⓐ $\dfrac{9}{2}$　ⓑ $\dfrac{11}{2}$

ⓒ $\dfrac{1}{3}$　ⓓ $\dfrac{5}{3}$　ⓔ $\dfrac{1}{4}$　ⓕ $\dfrac{3}{4}$

(2) 確率変数 X がパラメータ λ をもつポアソン分布に従っている．すなわち

$$P(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \quad (n=0,1,2,\ldots)$$

とする．また，$E(X)=3$ であるとする．このとき，$\lambda =$ **57** であり

$$P(X \geqq 2) = \boxed{\textbf{58}}$$

である．

57 ・ **58** の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 9

⑤ $\sqrt{3}$　⑥ $\frac{1}{3}$　⑦ $\frac{2}{3}$　⑧ $\frac{1}{9}$　⑨ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ⓐ e　ⓑ e^3　ⓒ $\log 3$

ⓓ $1-3e^{-3}$　ⓔ $1+3e^{-3}$　ⓕ $1-4e^{-3}$　ⓖ $1+4e^{-3}$

解説

(1) まず

$$E(X)=E(Y)=\frac{1}{12}\cdot(-4)+\frac{1}{6}\cdot(-1)+a\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot 3=1$$

より，$\boxed{\mathbf{54}}$ の答えは ① である．また，確率分布表にある確率の合計が 1 であることから

$$a=1-\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

となる．これを用いると

$$\begin{aligned}V(X)=V(Y)&=E\big((X-E(X))^2\big)\\&=\frac{1}{12}\cdot(-4-1)^2+\frac{1}{6}\cdot(-1-1)^2\\&\quad+a\cdot(0-1)^2+\frac{1}{4}\cdot(2-1)^2+\frac{1}{3}\cdot(3-1)^2\\&=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

より，$\boxed{\mathbf{55}}$ の答えは ⓐ である．さらに X,Y が独立であるため， 定数 k,ℓ に対して $V(kX+\ell Y)=k^2V(X)+\ell^2V(Y)$ が成り立つから

$$\begin{aligned}V\left(\frac{X+2Y}{3}\right)&=\left(\frac{1}{3}\right)^2V(X)+\left(\frac{2}{3}\right)^2V(Y)\\&=\frac{1}{9}\cdot\frac{9}{2}+\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{2}\qquad=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

より，$\boxed{\mathbf{56}}$ の答えは ⑧ である．

(2) パラメータ λ をもつポアソン分布に従う確率変数 X の平均は $E(X)=\lambda$ である．実際に，指数関数 e^x のマクローリン展開の公式 $e^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ より

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot P(X=n)=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\\&=\lambda e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\quad(\because\ n=0\text{ に対応する項は }0\text{ なので総和から省いた})\\&=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\qquad(\because\ k=n-1\text{ と置いた})\\&=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda\end{aligned}$$

となるからである．したがって，$E(X) = 3$ であれば $\lambda = 3$ となる．よって，$\boxed{\textbf{57}}$ の答えは ③ である．

さらに，全事象の確率は 1 であるから

$$\begin{aligned} P(X \geqq 2) &= 1 - \big(P(X=0) + P(X=1)\big) \\ &= 1 - \left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!}\right) \qquad = 1 - 4e^{-3} \end{aligned}$$

となる．よって，$\boxed{\textbf{58}}$ の答えは ⓕ である．

問 2 ある工場では 3 つの機械 a, b, c を用いてそれぞれ同じ製品を作っている．それぞれの機械から作られる製品の個数の割合は 4 : 3 : 3 である．また，不良品の出る確率は a が 3%，b が 4%，c が 2% である．製品の中から無作為に取り出した 1 個が機械 a, b, c を用いて作られたものであるという事象をそれぞれ A, B, C で表し，製品が不良品であるという事象を F とする．このとき

$$P(A) = \frac{4}{10},\quad P(B) = \frac{3}{10},\quad P(C) = \frac{3}{10},$$

$$P(F|A) = \frac{3}{100},\quad P(F|B) = \frac{4}{100},\quad P(F|C) = \frac{2}{100}$$

である．ここで，2 つの事象 D, E に対し，$P(D|E)$ は E が起こったときの D が起こる条件付き確率を表す．取り出した製品が機械 a を用いて作られ，かつ不良品である確率は

$$P(A \cap F) = \boxed{\mathbf{59}}$$

である．また， 取り出した製品が不良品である確率は

$$P(F) = \boxed{\mathbf{60}}$$

である．さらに，取り出した製品が不良品であったとき，それが機械 a を用いて作られたものである確率は

$$P(A|F) = \boxed{\mathbf{61}}$$

である．

$\boxed{59}$ 〜 $\boxed{61}$ の解答群

⓪ $\frac{2}{5}$	① $\frac{3}{5}$	② $\frac{4}{5}$	③ $\frac{2}{6}$	④ $\frac{3}{6}$
⑤ $\frac{2}{100}$	⑥ $\frac{3}{100}$	⑦ $\frac{4}{100}$	⑧ $\frac{7}{100}$	⑨ $\frac{9}{100}$
ⓐ $\frac{10}{1000}$	ⓑ $\frac{12}{1000}$	ⓒ $\frac{14}{1000}$	ⓓ $\frac{16}{1000}$	ⓔ $\frac{18}{1000}$

解説

取り出した製品が機械 a を用いて作られ，かつ不良品である確率は

$$P(A \cap F) = P(A)P(F|A) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{100} = \frac{12}{1000}.$$

よって，$\boxed{\mathbf{59}}$ の答えは b である．

次に，取り出した製品が不良品である確率は

$$\begin{aligned} P(F) &= P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F) \\ &= P(A)P(F|A) + P(B)P(F|B) + P(C)P(F|C) \\ &= \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{100} + \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{100} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{100} = \frac{3}{100}. \end{aligned}$$

よって，$\boxed{\mathbf{60}}$ の答えは 6 である．

最後に，取り出した製品が不良品であったとき，それが機械 a を用いて作られたものである確率は

$$P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{12}{1000}}{\frac{3}{100}} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}.$$

よって，$\boxed{\mathbf{61}}$ の答えは 0 である．

問 3　確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が，ある定数 c に対して

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{(x+3)^2} & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

で与えられている．

(1)　$c = \boxed{\mathbf{62}}$ である．

$\boxed{\mathbf{62}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{3}$　⑥ $\dfrac{1}{4}$

(2)　X の分布関数を $F(x) = P(X \leqq x)$ とすると

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{\mathbf{63}} & (x \geqq 0) \\ \boxed{\mathbf{64}} & (x < 0) \end{cases}$$

である．また，$P(|X| \leqq 1) = \boxed{\mathbf{65}}$ である．

$\boxed{\mathbf{63}}$・$\boxed{\mathbf{64}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{x+3}$　③ $-\dfrac{1}{x+3}$

④ $\dfrac{3}{x+3}$　⑤ $-\dfrac{3}{x+3}$　⑥ $1-\dfrac{1}{x+3}$　⑦ $1+\dfrac{1}{x+3}$

⑧ $1-\dfrac{3}{x+3}$　⑨ $1+\dfrac{3}{x+3}$

$\boxed{\mathbf{65}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{2}{3}$

⑤ $\dfrac{1}{4}$　⑥ $\dfrac{3}{4}$　⑦ $\dfrac{1}{5}$　⑧ $\dfrac{2}{5}$　⑨ $\dfrac{3}{5}$

解説

確率密度関数の定義から

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

なので

$$(\text{左辺}) = \int_0^{\infty} \frac{c}{(x+3)^2}\,dx = \left[-\frac{c}{x+3}\right]_0^{\infty} = \frac{c}{3} = 1$$

であるから， $c = 3$ を得る．分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ については， $x \geqq 0$ のとき

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^{x} \frac{3}{(t+3)^2}\,dt = \left[-\frac{3}{t+3}\right]_0^{x} = 1 - \frac{3}{x+3}$$

であり，$x < 0$ のとき

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

である．また，

$$\begin{aligned} P(|X| \leqq 1) &= P(-1 \leqq X \leqq 1) = P(X \leqq 1) - P(X \leqq -1) \\ &= F(1) - F(-1) = \left(1 - \frac{3}{1+3}\right) - 0 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である．以上より， $\boxed{\textbf{62}}$, $\boxed{\textbf{63}}$, $\boxed{\textbf{64}}$, $\boxed{\textbf{65}}$ の答えは順に③, ⑧, ⓪, ⑤ となる．

問 4 ある飲料メーカーでは，500 ml 入りのペットボトル飲料の製品 Q を製造している．この製品を製造する機械を変更したので，変更前と同様の内容量で製品が作られているか調べることにした．過去の測定データから，製品 Q の 1 本あたりの内容量は正規分布に従い，内容量の母標準偏差は 0.5 ml と仮定してよいことがわかっている．変更後の製造機械で作られた製品 Q を無作為に 100 本抽出し，その内容量を測定したところ，平均は 499.74 ml であった．

この測定に基づいて，母平均 μ ml に対する

帰無仮説 H_0 : $\mu = 500$

対立仮説 H_1 : $\mu \neq 500$

の両側検定を有意水準 1% で行うことにした．抽出した 100 本の内容量をそれぞれ確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ とすると，これらはすべて独立で正規分布 $N(\mu, 0.5^2)$ に従う．このとき，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}}{100}$$

は正規分布 $N\left(\boxed{\mathbf{66}}, \boxed{\mathbf{67}}\right)$ に従う．帰無仮説 H_0 のもとでは

$$Z = \frac{\overline{X} - 500}{0.5/\sqrt{100}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である．正規分布表から

$$P(-2.576 \leqq Z \leqq 2.576) \fallingdotseq 0.99$$

がわかる．一方，標本平均 $\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = 499.74$（単位：ml）であるので，Z の実現値は $z = \boxed{\mathbf{68}}$ となる．よって，帰無仮説 H_0 は有意水準 1% で $\boxed{\mathbf{69}}$ ．

$\boxed{66}$ の解答群

⓪ $\dfrac{\mu}{100}$　① $\dfrac{\mu}{10}$　② μ　③ 10μ　④ 100μ　⑤ 0.5μ　⑥ $0.5^2\mu$

$\boxed{67}$ の解答群

⓪ 100×0.5　① 100×0.5^2　② $100^2 \times 0.5^2$　③ 0.5^2

④ $\dfrac{0.5}{100}$　⑤ $\dfrac{0.5^2}{100}$　⑥ $\dfrac{0.5}{100^2}$　⑦ $\dfrac{0.5^2}{100^2}$

$\boxed{\textbf{68}}$ **の解答群**

⓪ 0

① 0.26　② 0.52　③ 0.78　④ 1.04

⑤ 2.6　⑥ 5.2　⑦ 7.8　⑧ 10.4

⑨ -0.26　ⓐ -0.52　ⓑ -0.78　ⓒ -1.04

ⓓ -2.6　ⓔ -5.2　ⓕ -7.8　ⓖ -10.4

$\boxed{\textbf{69}}$ **の解答群**

⓪ 採択される　① 棄却される

解説

標本平均に対する平均と分散について復習しておく．確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立で，同じ正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとする．このとき，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

もやはり正規分布に従い，その平均と分散はそれぞれ

$$E(\overline{X}) = \mu, \qquad V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

で与えられる．つまり，X は正規分布 $N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う．本問では母平均を μ とし，n, σ はそれぞれ $n = 100, \sigma = 0.5^2$ で与えられているため，$\overline{X}$ の平均は μ であり，分散は $\dfrac{0.5^2}{100}$ である．よって，$\boxed{\mathbf{66}}$，$\boxed{\mathbf{67}}$ の答えは順に ②, ⑤ である．

次に $\overline{X}$ を標準正規分布 $N(0,1)$ に標準化する．一般に，正規分布 $N(\mu_0, \sigma^2)$ に対して

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

とすれば Z は $N(0,1)$ に従う．本問ではこの式に $\mu_0 = 500, \sigma = 0.5, n = 100$ を代入して，帰無仮説 H_0 のもとで

$$(*) \qquad Z = \frac{\overline{X} - 500}{0.5/\sqrt{100}} = 20(\overline{X} - 500)$$

と表される．

さて，問題文のように正規分布表より

$$P(-2.576 < Z < 2.576) \fallingdotseq 0.99$$

となる．右辺が 0.99 であるのは，本問の目的が有意水準 1%の両側検定であり，右と左からそれぞれ 0.5%を引いた残りが 99%だからである．Z の実現値 z の値によって採択される仮説が決定される．具体的には

$$-2.576 < z < 2.576 \iff \text{帰無仮説 } H_0 \text{ が採択される}$$

$$z \leqq -2.576 \text{ または } z \geqq 2.576 \iff \text{対立仮説 } H_1 \text{ が採択される}$$

と判定できる．問題文から，$\overline{X}$ の実現値は $\bar{x} = 499.74$ であるので，$(*)$ に $\overline{X} = 499.74$ を代入すれば Z の実現値は

$$z = 20(499.74 - 500) = -5.2$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{68}}$ の答えは ⓔ である．また，$z = -5.2 \leqq -2.576$ となるので，対立仮説 H_1 が採択される，すなわち，帰無仮説 H_0 は有意水準 1%で棄却される．よって，$\boxed{\mathbf{69}}$ の答えは ① である．