EMaT
工学系数学統一試験
Engineering Mathematics Test

2024年12月14日（土）
4分野受験 午後1時30分 〜 午後4時10分
3分野受験 午後1時30分 〜 午後3時30分
2分野受験 午後1時30分 〜 午後2時50分
1分野受験 午後1時30分 〜 午後2時10分

＊受験分野は，各大学・高専の指示に従ってください．

受験上の注意

(1) **机の右上に学生証を提示**すること．
(2) 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと．
(3) 問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁，解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(4) マークには **HB または B の鉛筆** (またはシャープペンシル) を使用すること．
(5) 解答用紙を汚損したときは，手を挙げて監督者に知らせること．
(6) 問題冊子の余白等は適宜利用してよいが，どのページも切り離さないこと．
(7) 試験開始 40 分後から退室を認める．
(8) 問題冊子は持ち帰ること．
(9) 気分が悪くなった場合は，手を挙げて監督者に知らせること．
(10) その他，監督者の指示に従うこと．

解答上の注意

(1) 解答として最も適切なものを指定された解答群から選び，その記号を解答用紙にマークすること．ただし，解答群の中にふさわしいものが見つからない場合には ⓘ をマークすること．例えば，$\boxed{\mathbf{23}}$ と表示してある問いに対して解答記号 ⓒ を選ぶ場合は，次のようにマークすること．

23	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⓐ ⓑ ● ⓓ ⓔ ⓕ ⓖ ⓗ ⓘ

(2) 破線で囲まれた番号は，前に現れた番号であることを表す．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ には $\boxed{\mathbf{23}}$ と同じ解答が入る．

(3) 解答が数式の場合，$\boxed{\mathbf{23}}$ は $(\boxed{\mathbf{23}})$ という意味である．したがって，例えば $\boxed{\mathbf{23}}$ の解答が $-x-1$ の場合，$x^2-\boxed{\mathbf{23}}$ は $x^2-(-x-1)$ を意味する．

(4) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合とする．

(5) $\log x$ は x の自然対数，すなわち e を底とする対数 $\log_e x$ を表す．

(6) $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ は，それぞれ $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ の逆関数を表し，$\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ と書き表されることもある．各逆関数がとる値の範囲（値域）は，$-\frac{\pi}{2} \leqq \sin^{-1} x \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ とする．

目次

第１分野　微分積分

〔 問 1 ～ 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\textbf{1}}$ ～ $\boxed{\textbf{17}}$ 〕

問１　次の 2 つの極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\boxed{\textbf{1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}=\boxed{\textbf{2}}$$

$\boxed{\textbf{1}}$ ・ $\boxed{\textbf{2}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{3}$　⑥ $\dfrac{2}{3}$

⑦ -1　⑧ -2　⑨ -3　ⓐ $-\dfrac{1}{2}$　ⓑ $-\dfrac{1}{3}$　ⓒ $-\dfrac{2}{3}$

ⓓ e　ⓔ ∞　ⓕ $-\infty$

解説

1 つ目は $\dfrac{0}{0}$ の不定形である．そこでロピタルの定理を 2 回用いると

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{4\cos 2x}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

となる．よって， $\boxed{\mathbf{1}}$ の答えは ④ である．

2 つ目は分子と分母ともに $\infty-\infty$ の不定形である．分子と分母それぞれに $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}$ と $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}$ をかけると

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x+3}}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}\\
&= -\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\\
&= -\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}
\end{aligned}$$

である． $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ であることから

$$-\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}=-\frac{2}{3}$$

となる．よって， $\boxed{\mathbf{2}}$ の答えは ⓒ である．

問 2 (1) 関数 $\sin x$ のマクローリン展開（$x=0$ を中心とするテイラー展開）は

$$\sin x \;=\; \boxed{\mathbf{3}}$$

である．したがって，関数 $\sin(\sin x)$ のマクローリン展開を

$$\sin(\sin x) \;=\; x + ax^3 + \frac{1}{10}x^5 + \cdots$$

とおくと $a = \boxed{\mathbf{4}}$ である．

(2) 関数 $\sqrt{1+\sin x}$ のマクローリン展開を

$$\sqrt{1+\sin x} \;=\; 1 + \frac{1}{2}x + bx^2 + \cdots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおくと $b = \boxed{\mathbf{5}}$ である．

$\boxed{\mathbf{3}}$ の解答群

⓪ $1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^6}{6} + \cdots$　① $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^6}{6} + \cdots$

② $1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$　③ $1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

④ $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} + \cdots$　⑤ $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots$

⑥ $x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$　⑦ $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$

$\boxed{\mathbf{4}}$ ・ $\boxed{\mathbf{5}}$ の解答群

⓪ 0

① 1　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{3}$　④ $\dfrac{1}{4}$　⑤ $\dfrac{1}{5}$　⑥ $\dfrac{1}{6}$　⑦ $\dfrac{1}{8}$

⑧ -1　⑨ $-\dfrac{1}{2}$　ⓐ $-\dfrac{1}{3}$　ⓑ $-\dfrac{1}{4}$　ⓒ $-\dfrac{1}{5}$　ⓓ $-\dfrac{1}{6}$　ⓔ $-\dfrac{1}{8}$

解説

(1) マクローリン展開可能な関数 $f(x)$ のマクローリン展開は

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

で与えられる．ここで， $f^{(n)}(x)$ は 関数 $f(x)$ の n 階導関数を表す．$\sin x$ はマクローリン展開可能であり

$$\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

となることから，$\sin x$ のマクローリン展開は

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

である．よって， $\boxed{\textbf{3}}$ の答えは ⑦ である．この式の x に $\sin x$ を代入すれば，$\sin(\sin x)$ のマクローリン展開は

$$\begin{aligned}\sin(\sin x) &= (\sin x) - \frac{(\sin x)^3}{3!} + \frac{(\sin x)^5}{5!} + \cdots \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cdots\right) - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^5}{5!} + \cdots\end{aligned}$$

と計算される．ここで x^3 より次数が高くなる項は排除して計算すると

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - \frac{(x)^3}{3!} &= x + \left(-\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right)x^3 \\ &= x - \frac{1}{3}x^3\end{aligned}$$

となる．よって， $\boxed{\textbf{4}}$ の答えは ⓐ である．

(2) $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$ の導関数を計算すると

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}, \quad f''(x) = -\frac{\sin x}{2\sqrt{1+\sin x}} - \frac{\cos^2 x}{4(1+\sin x)^{3/2}}$$

である．よって

$$f'(0) = \frac{1}{2}, \quad f''(0) = -\frac{1}{4}$$

となる．これをマクローリン展開の式に代入すれば，$\sqrt{1+\sin x}$ のマクローリン展開は

$$\sqrt{1+\sin x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

であることがわかる．よって， $\boxed{\textbf{5}}$ の答えは ⓔ である．

問 3 (1) 正の定数 a に対して，不定積分

$$I = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2}$$

を求める．まず，$J = \displaystyle\int \frac{dt}{t^2+a^2}$ とおき，$J = \displaystyle\int \frac{(t)'}{t^2+a^2}dt$ とみなして部分積分を行うと

$$J = \frac{t}{t^2+a^2} + 2J - \boxed{\mathbf{6}}\, I$$

となる．ここで，$J = \boxed{\mathbf{7}} + C$ (C は積分定数) なので

$$I = \frac{1}{\boxed{\mathbf{6}}}\left(\frac{t}{t^2+a^2} + \boxed{\mathbf{7}} + C\right)$$

と求まる．

$\boxed{\mathbf{6}}$ の解答群

⓪ a　① $2a$　② $3a$　③ $4a$　④ $5a$　⑤ $6a$　⑥ $7a$

⑦ a^2　⑧ $2a^2$　⑨ $3a^2$　ⓐ $4a^2$　ⓑ $5a^2$　ⓒ $6a^2$　ⓓ $7a^2$

$\boxed{\mathbf{7}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{2}{t^2+a^2}$　① $\dfrac{2t}{t^2+a^2}$　② $\dfrac{2t^2}{t^2+a^2}$　③ $\dfrac{2}{(t^2+a^2)^2}$

④ $\dfrac{2t}{(t^2+a^2)^2}$　⑤ $\dfrac{2t^2}{(t^2+a^2)^2}$　⑥ $\tan^{-1} at$　⑦ $a\tan^{-1} at$

⑧ $\dfrac{1}{a}\tan^{-1} at$　⑨ $\tan^{-1}\dfrac{t}{a}$　ⓐ $a\tan^{-1}\dfrac{t}{a}$　ⓑ $\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{t}{a}$

(2) 不定積分

$$K = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$$

を求める．$t = \boxed{\mathbf{8}}$ として置換積分法を用いると，(1) より

$$K = \int \frac{dt}{(t^2+4)^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{\boxed{\mathbf{8}}}{x^2} + \boxed{\mathbf{9}} + C'\right) \quad (C' \text{ は積分定数})$$

となる．

$\boxed{\mathbf{8}}$ ・ $\boxed{\mathbf{9}}$ の解答群

⓪ $\sqrt{x+2}$	① $\sqrt{x-2}$	② $\sqrt{x^2-4}$
③ $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$	④ $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$	⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$
⑥ $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$	⑦ $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x-2}}{2}$	⑧ $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2}$
⑨ $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$	ⓐ $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x-2}}{2}$	ⓑ $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2}$

解説

本問は 1 変数関数の不定積分の諸公式を確認するのが目的である．

(1) 部分積分法とは，微分可能な 2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

と変形する方法のことである．問題文にあるように部分積分法を用いて J を計算すると

$$J = t\cdot\frac{1}{t^2+a^2} - \int t\cdot\left(-\frac{2t}{(t^2+a^2)^2}\right)dt$$

となる．ここで，$\dfrac{t^2}{(t^2+a^2)^2} = \dfrac{1}{t^2+a^2} - \dfrac{a^2}{(t^2+a^2)^2}$ と変形できるので

$$\begin{aligned} J &= \frac{t}{t^2+a^2} + 2\int\frac{t^2}{(t^2+a^2)^2}\,dt \\ &= \frac{t}{t^2+a^2} + 2\left(\int\frac{dt}{t^2+a^2} - a^2\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^2}\right) \\ &= \frac{t}{t^2+a^2} + 2J - 2a^2 I \qquad (*) \end{aligned}$$

を得る．よって，$\boxed{\mathbf{6}}$ の答えは ⑧ である．次に，$J = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{t}{a} + C$ (C は積分定数) なので $\boxed{\mathbf{7}}$ の答えは ⓑ である．したがって $(*)$ から

$$I = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{t}{t^2+a^2} + J\right) = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{t}{t^2+a^2} + \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{t}{a} + C\right)$$

となる．J の不定積分はよく問われるので覚えておこう．

(2) 置換積分法とは，連続関数 $f(t)$ および微分可能な関数 $\varphi(x)$ に対して，$t=\varphi(x)$ とおくことで

$$\int f\bigl(\varphi(x)\bigr)\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

と変形する方法のことである．状況に応じて右辺から左辺，左辺から右辺へと変形することで，積分計算を進めることができる．不定積分 $K = \displaystyle\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-4}}$ に置換積分法を用いる際 $\varphi(x)$ が何であるかを $\boxed{\mathbf{8}}$ では問うている．置換積分法を用いた結果 $K = \displaystyle\int\frac{dt}{(t^2+4)^2}$ と変形できることに注意する．選択肢 ⑥ から ⓑ までの関数を t とおいた場合，x を t で表す際に必ず正接関数 $\tan$ が現れる．変形後の K の式にはそのような関数は含まれていないため，これらの選択肢は除外できる．

また，選択肢 ⓪, ③ について，それぞれの関数を $\varphi(x)$ とおいたとき $\varphi'(x)$ は $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ の項を含む．その一方で，変形前の K の被積分関数において

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{1}{\sqrt{x+2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

と変形できる．変形後の K の被積分関数と比較すれば，$\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ を変形したときに現れる関数とその被積分関数の間に合致するものは見られない．したがって，⓪, ③ も除外される．同様な議論により選択肢 ①, ④ も除外できる．あとは選択肢 ②, ⑤ をそれぞれ $\varphi(x)$ に代入して置換積分法を用いれば $\boxed{\textbf{8}}$ は ② となることがわかる．

変形後の K は (1) において $a=2$ とした場合の I に等しいので

$$K=\frac{1}{8}\left(\frac{t}{t^2+4}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2}+C'\right)\qquad (C'\text{ は積分定数})$$

と表せる．あとは $\boxed{\textbf{8}}$ で求めた $t=\sqrt{x^2-4}$ を代入して

$$K=\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}+C'\right)$$

を得る．よって，$\boxed{\textbf{9}}$ は ⓑ である．

問 4　2 変数関数

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}y^2 + xy - 6x - \frac{3}{2}y + 4$$

の極値について考える．

(1)　連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

の解は $(x,y) = (3,\ -3)$ と $(x,y) = \boxed{\mathbf{10}}$ の 2 つである．

$\boxed{\mathbf{10}}$ の解答群

⓪ $(1,\ 1)$　① $(2,\ 3)$　② $(0,\ 1)$　③ $(2,\ 2)$

④ $(0,\ -1)$　⑤ $(-1,\ 5)$　⑥ $(3,\ -1)$　⑦ $(-2,\ -3)$

(2)　点 $(3,\ -3)$ については，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3, -3) = \boxed{\mathbf{11}}$ であり

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,\ -3) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,\ -3) \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3,\ -3) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,\ -3) \end{vmatrix} = \boxed{\mathbf{12}}$$

である．したがって，関数 $f(x,y)$ は点 $(3,\ -3)$ で $\boxed{\mathbf{13}}$．

$\boxed{\mathbf{11}}$ ・ $\boxed{\mathbf{12}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7

⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3　ⓑ -4　ⓒ -5　ⓓ -6　ⓔ -7

$\boxed{\mathbf{13}}$ の解答群

⓪ 極大値をとる　① 極小値をとる　② 極値をとらない

解説

(1) $f(x,y)$ をそれぞれの変数 x, y で偏微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 + y - 6, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}y + x - \frac{3}{2}$$

となる．よって解くべき連立方程式は

$$\begin{cases} x^2 + y &= 6 \\ 2x + y &= 3 \end{cases}$$

となる．これを解くと $(x,y) = (3,-3), (-1,5)$ を得る．よって，$\boxed{\textbf{10}}$ の答えは ⑤ である．

(2) 一般に，関数 $f(x,y)$ に対して，連立方程式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

の解 $(x,y) = (a,b)$ を $f(x,y)$ の**停留点**と呼ぶ．$f(x,y)$ が停留点 (a,b) において極値を取るかについては，次のような判定法がある．行列（ヘッセ行列と呼ばれる）

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,\,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,\,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,\,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,\,b) \end{pmatrix}$$

の行列式（ヘッシアンと呼ばれる）を H とおき，$A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,\,b)$ とおくと

(i) $H > 0$ かつ $A > 0$ のとき，$f(x,y)$ は停留点 (a,b) で極小値をとる;

(ii) $H > 0$ かつ $A < 0$ のとき，$f(x,y)$ は停留点 (a,b) で極大値をとる;

(iii) $H < 0$ のとき，$f(x,y)$ は停留点 (a,b) で極値をとらない;

(iii) $H = 0$ のとき，$f(x,y)$ は停留点 (a,b) で極値をとるかどうかはわからない．

本問題の場合は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,-3) = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,-3) = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(3,-3) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(3,-3) = 1$$

であるので，停留点 $(3,-3)$ において $A = 6 > 0$, $H = 2 > 0$ である．よって $\boxed{\textbf{11}}$ の答えは ⑥, $\boxed{\textbf{12}}$ の答えは ② である．さらに，上述の (i) より $f(x,y)$ は停留点 $(3,-3)$ で極小値をとる．よって，$\boxed{\textbf{13}}$ の答えは ① である．

問 5 xy 平面内の集合 D が

$$D = \left\{(x, y) \mid 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ x + y \geqq 0\right\}$$

で与えられているとき，重積分

$$I = \iint_D \log\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$$

の値を求める．極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を行うと，集合 D に対応する (r, θ) の集合は

$$E = \left\{(r, \theta) \,\middle|\, 1 \leqq r \leqq \boxed{\mathbf{14}},\ -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \boxed{\mathbf{15}}\right\}$$

であるから

$$I = \iint_E \boxed{\mathbf{16}}\, drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\boxed{\mathbf{15}}} \left(\int_1^{\boxed{\mathbf{14}}} \boxed{\mathbf{16}}\, dr\right) d\theta = \boxed{\mathbf{17}}\,\pi$$

となる．

$\boxed{\mathbf{14}}$・$\boxed{\mathbf{15}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 8　⑥ $\sqrt{2}$

⑦ $\dfrac{\pi}{4}$　⑧ $\dfrac{\pi}{2}$　⑨ $\dfrac{3}{4}\pi$　ⓐ π　ⓑ $\dfrac{5}{4}\pi$　ⓒ $\dfrac{3}{2}\pi$　ⓓ 2π

$\boxed{\mathbf{16}}$・$\boxed{\mathbf{17}}$ の解答群

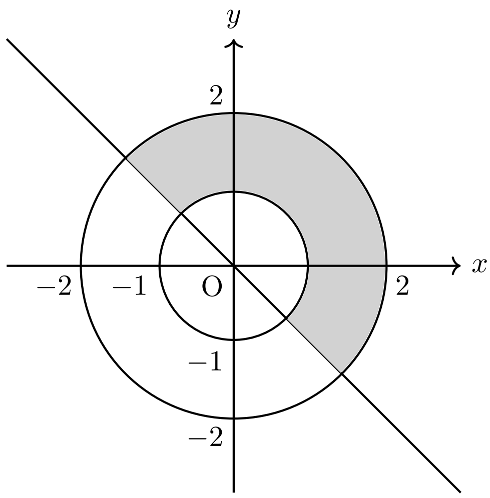
⓪ $\log r$　① $\dfrac{1}{2}\log r$　② $r\log r$　③ $r^2\log r$

④ $-\dfrac{1}{4}$　⑤ $-\dfrac{3}{4}$　⑥ $\log 2$　⑦ 2

⑧ $2\log 2 - \dfrac{3}{4}$　⑨ $\dfrac{3}{2}\log 2 - \dfrac{3}{2}$　ⓐ $\log 2 - \dfrac{3}{2}$　ⓑ $\dfrac{3}{2}\log 2 - 1$

解説

集合 D を図示すると以下の灰色の部分になる（境界を含む）.



D の条件式の 1 つである不等式 $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4$ に $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を代入する. $x^2+y^2=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=r^2$ であることより, $1 \leqq r^2 \leqq 4$, すなわち $1 \leqq r \leqq 2$ となる. よって, $\boxed{\mathbf{14}}$ の答えは ② である. また, $x+y \geqq 0$ にも $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ を代入すると, $r(\sin\theta+\cos\theta) \geqq 0$ となる. 三角関数の合成より, $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ である. これを満たす θ の範囲は問題文に合わせると $-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ である. よって $\boxed{\mathbf{15}}$ の答えは ⑨ である. まとめると, 集合 E は

$$E=\left\{(r,\theta)\ \middle|\ 1 \leqq r \leqq 2,\ -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi\right\}$$

と表される.

上記の通り, $x^2+y^2=r^2$ であることより, $\log\sqrt{x^2+y^2}=\log r$ である. また, 極座標変換におけるヤコビ行列式（ヤコビアン）は

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

である. したがって, 極座標変換により $dxdy$ には $rdrd\theta$ が対応するので, 置換積分法に

より

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_E r\log r\, dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\int_1^2 r \log r\, dr \right) d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\left[\frac{1}{2} r^2 \log r \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{1}{r}\, dr \right) d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \left(2\log 2 - \frac{3}{4} \right) d\theta \\
&= \left(2\log 2 - \frac{3}{4} \right) \pi
\end{aligned}
$$

となる．ここで，3 番目の等号では部分積分法を用いた．よって，$\boxed{\mathbf{16}}$ の答えは ②，$\boxed{\mathbf{17}}$ の答えは ⑧ である．

第2分野　線形代数

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{18}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{36}}$ 〕

(注意) 行列 A に対し，$\operatorname{rank} A$ は A の階数（ランク）を表す.

問 1 (1) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

とする．このとき行列式 $|A|$ の値は $\boxed{\mathbf{18}}$ である．また，逆行列 A^{-1} の $(1,2)$ 成分は $\boxed{\mathbf{19}}$ である.

$\boxed{\mathbf{18}}$ ・ $\boxed{\mathbf{19}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7

⑧ −1　⑨ −2　ⓐ −3　ⓑ −4　ⓒ −5　ⓓ −6　ⓔ −7

(2) a, b を定数とする．座標平面において，点 (x, y) を点 (u, v) に移す線形写像 f を

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

により定める．f により直線 $y = -x + 1$ 上のすべての点が直線 $y = bx + 1$ 上に移るとき，$a = \boxed{\mathbf{20}}$, $b = \boxed{\mathbf{21}}$ である.

$\boxed{\mathbf{20}}$ ・ $\boxed{\mathbf{21}}$ **の解答群**

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7

⑧ −1　⑨ −2　ⓐ −3　ⓑ −4　ⓒ −5　ⓓ −6　ⓔ −7

解説

(1) A は 4 次の正方行列であるので，サラスの方法を使うことができない．そこで行や列に関する展開を行うことを考える．行列式 $|A|$ の第 1 行と第 2 行から第 3 行の 2 倍をそれぞれ引き，第 4 行から第 3 行を引くと

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

となるので，第 1 列に沿って余因子展開すると 3 次の行列式に帰着できる．ここでサラスの方法を使うこともできるが，さらに第 2 行に第 3 行を加え，第 1 行に第 3 行の 2 倍を加え，第 1 列に沿って余因子展開すると

$$A = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

となる．よって， $\boxed{\mathbf{18}}$ の答えは ⓐ である．

逆行列を求める方法には，余因子行列を用いる方法と掃き出し法を用いる方法がある．ここでは，余因子行列を用いる方法で求める．A の $(i,\, j)$ 余因子 A_{ij} は，i 行と j 列を取り除いた $n-1$ 次の小行列の行列式を D_{ij} としたとき

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

で定義される．これを用いると，逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

のように与えられる．つまり，A^{-1} の (i, j) 成分は $\frac{1}{|A|}A_{ji}$ となっている（行と列の番号が入れ替わっていることに注意）．これを用いると，本問題における A^{-1} の (1, 2) 成分は $|A| = -3$ であることから

$$\frac{A_{21}}{|A|} = \frac{1}{-3}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

と計算される．よって， $\boxed{\mathbf{19}}$ の答えは ④ である．

(2) 直線 $y=-x+1$ 上の点は位置ベクトルで $\begin{pmatrix} x \\ -x+1 \end{pmatrix}$ と表すことができる．このベクトルを線形写像 f で移すと

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+(-x+1) \\ ax-(-x+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ (a+1)x-1 \end{pmatrix}$$

となる．これが直線 $y=bx+1$ 上の点であるためには，上記の u, v がすべての x に対して $v=bu+1$ すなわち

$$(a+1)x-1=b(x+1)+1$$

を満たすときである．この等式の両辺の係数を比較すれば，a と b に関する連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a+1=b \\ -1=b+1 \end{cases}$$

が得られ，これを解いて $a=-3, b=-2$ が得られる．よって，$\boxed{\textbf{20}}$ の答えは ⓐ，$\boxed{\textbf{21}}$ の答えは ⑨ である．

問 2　3 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ におけるベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}$$

とおく．ただし，s は定数とする．

(1)　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立になるのは $s \neq$ **22** のときである．

(2)　$s =$ **22** のとき，$\boldsymbol{c} =$ **23** $\boldsymbol{a} +$ **24** $\boldsymbol{b}$ と表すことができる．

(3)　$\mathbb{R}^3$ の原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ となる点を A, B とする．このとき，三角形 △OAB の面積は **25** である．

22 〜 **25** の解答群

⓪ 0

① 1　② 2　③ 3　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{3}{4}$　⑥ $\frac{3}{2}$　⑦ $\frac{5}{2}$

⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3　ⓑ $-\frac{1}{4}$　ⓒ $-\frac{3}{4}$　ⓓ $-\frac{3}{2}$　ⓔ $-\frac{5}{2}$

解説

(1) ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を並べてできる行列を $A = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ とする．ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立であるための必要十分条件は $\operatorname{rank} A = 3$ である．一方，A を行基本変形により階段行列にすると下記のようになる．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & s \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 3 行}\times\frac{1}{2}]{\text{第 1 行}\times(-2)\to\text{第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{s}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行}\times\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{s}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第 2 行}\times(-1)\to\text{第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{2s+3}{4} \end{pmatrix}$$

これより，$s \neq -\frac{3}{2}$ のとき $\operatorname{rank} A = 3$ となるので，ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ が 1 次独立になる．よって，**22** の答えは ⓓ である．

(2) 上記の (1) で行なった基本変形に対応する行基本行列の積を P とすると，最後の行列は $PA = (P\boldsymbol{a}\ P\boldsymbol{b}\ P\boldsymbol{c})$ と表される．P は正則行列であることに注意．$s = -\frac{3}{2}$ のとき，階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (P\boldsymbol{a}\ P\boldsymbol{b}\ P\boldsymbol{c})$$

を得るので，$P\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1$, $P\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_2$ である．また

$$P\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{e}_1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\boldsymbol{e}_2 = 2P\boldsymbol{a} + \left(-\frac{3}{4}\right)P\boldsymbol{b}$$

であるので，この両側に左から P^{-1} をかければ，$\boldsymbol{c} = 2\boldsymbol{a} + \left(-\frac{3}{4}\right)\boldsymbol{b}$ と表される．よって，**23**，**24** の答えは順に ②, ⓒ である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を θ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は計算により

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 8$$

となり，また

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \cos\theta$ より $\cos\theta = \frac{4}{5}$ が得られ，$0 < \theta < \pi$ であることから $\sin\theta = \frac{3}{5}$ がわかる．以上より，三角形 $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \sin\theta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{3}{5} = 3$$

である．よって，**25** の答えは ③ である．

問 3 (1) A, B を 2 次の正方行列とする．このとき，以下の命題のうち真であるものをすべて選ぶと $\boxed{\mathbf{26}}$ である．

1. A, B が正則ならば，和 $A+B$ は正則である．

2. A, B が正則ならば，積 AB は正則である．

3. 積 AB が正則ならば，A, B はどちらも正則である．

4. 対角行列は正則である．

$\boxed{\mathbf{26}}$ **の解答群**

⓪ **1**	① **2**	② **3**	③ **4**
④ **1, 2**	⑤ **1, 3**	⑥ **1, 4**	⑦ **2, 3**
⑧ **2, 4**	⑨ **3, 4**	ⓐ **1, 2, 3**	ⓑ **1, 2, 4**
ⓒ **1, 3, 4**	ⓓ **2, 3, 4**	ⓔ **1, 2, 3, 4**	

(2) A, B, C を 2 次の正方行列とする．このとき，以下の命題のうち真であるものをすべて選ぶと $\boxed{\mathbf{27}}$ である．

5. 積 AB が零行列であるならば，A, B のどちらか一方は零行列である．

6. A が零行列でないならば，$AB = AC$ のとき $B = C$ が成り立つ．

7. すべての正の数 a に対して，$|aA| = a|A|$ が成り立つ．

8. $|AB| = |A|\,|B|$ が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{27}}$ **の解答群**

⓪ **5**	① **6**	② **7**	③ **8**
④ **5, 6**	⑤ **5, 7**	⑥ **5, 8**	⑦ **6, 7**
⑧ **6, 8**	⑨ **7, 8**	ⓐ **5, 6, 7**	ⓑ **5, 6, 8**
ⓒ **5, 7, 8**	ⓓ **6, 7, 8**	ⓔ **5, 6, 7, 8**	

解説

(1) **1. 正しくない．** 例えば正則行列 A に対して $B=-A$ とおくと，A, B はともに正則であるが，$A+B=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ は正則行列ではない．

2. 正しい． もし A, B がともに正則ならば，ともに逆行列 A^{-1}, B^{-1} が存在する．このとき $(AB)(B^{-1}A^{-1})$ を計算するとこれは単位行列となるため，すなわち $B^{-1}A^{-1}$ は AB の逆行列である．よって AB は正則行列である．

また (2) の **8** を活用してもよい．A が正則であるための必要十分条件は $|A|\neq 0$ である．もし A, B がともに正則ならば，$|A|\neq 0$ かつ $|B|\neq 0$．このとき積 AB の行列式は $|AB|=|A|\,|B|\neq 0$ となるため，AB は正則行列である．

3. 正しい． AB が正則ならば $|AB|\neq 0$．ここで $|AB|=|A|\,|B|$ であるため，$|A|\neq 0$ かつ $|B|\neq 0$．すなわち A も B も正則である．

4. 正しくない． 例えば零行列 $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ は対角行列であるが，正則ではない．

以上より命題 **2**, **3** が真である．よって，$\boxed{\mathbf{26}}$ の答えは ⑦ である．

(2) **5. 正しくない．** 例えば

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-4\\-1&2\end{pmatrix}$$

とすると，AB は零行列であるが A, B はともに零行列ではない．

6. 正しくない． 例えば

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1&0\\2&2\end{pmatrix}$$

とすると，$AB=AC=\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}$ であるが $B\neq C$ である．

7. 正しくない． $A=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$ に対して $aA=\begin{pmatrix}ab_{11}&ab_{12}\\ab_{21}&ab_{22}\end{pmatrix}$ である．このとき行列 aA の行列式は基本変形により

$$|aA|=\begin{vmatrix}ab_{11}&ab_{12}\\ab_{21}&ab_{22}\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}b_{11}&ab_{12}\\b_{21}&ab_{22}\end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{vmatrix}=a^2|A|$$

である．一般に A を n 次の正方行列としたとき，$|aA|=a^n|A|$ が成り立つ．

8. 正しい． 行列式の乗法性 $|AB| = |A|\,|B|$ は行列式の基本的な特性の一つである．本問では A, B ともに 2 次の正方行列であるが，一般に A, B ともに n 次の正方行列であっても乗法性は成立する．

以上より命題 **8** が真である．したがって， $\boxed{\mathbf{27}}$ の答えは ③ である．

問 4　連立 1 次方程式

$$(*)\qquad \begin{cases} 2x + 3y + az = 1 \\ x + y + (1-b)z = 0 \\ y + ab\,z = 2 \end{cases}$$

を考える．ただし，a, b は定数とする．この方程式の係数行列 A，拡大係数行列 B は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & 1 & 1-b \\ 0 & 1 & ab \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1-b & 0 \\ 0 & 1 & ab & 2 \end{pmatrix}$$

である．

(1)　$\operatorname{rank} B =$ $\boxed{\mathbf{28}}$ である．

(2)　$a =$ $\boxed{\mathbf{29}}$ または $b =$ $\boxed{\mathbf{30}}$ のとき，$\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} B$ である．よって，方程式 $(*)$ は $\boxed{\mathbf{31}}$ ．

(3)　$a \neq$ $\boxed{\mathbf{29}}$ かつ $b \neq$ $\boxed{\mathbf{30}}$ のとき，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B =$ $\boxed{\mathbf{28}}$ である．よって，方程式 $(*)$ は $\boxed{\mathbf{32}}$ ．

$\boxed{\mathbf{28}}$ ～ $\boxed{\mathbf{30}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7

⑧ −1　⑨ −2　ⓐ −3　ⓑ −4　ⓒ −5　ⓓ −6　ⓔ −7

$\boxed{\mathbf{31}}$ ・ $\boxed{\mathbf{32}}$ の解答群

⓪ 解をもたない　① ただ 1 組の解をもつ　② 無数の解をもつ

解説

(1) 拡大係数行列 B に行基本変形を施して階段行列を求めると

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1-b & 0 \\ 0 & 1 & ab & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行}\leftrightarrow\text{第 2 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-b & 0 \\ 2 & 3 & a & 1 \\ 0 & 1 & ab & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 1 行}\times(-2)\to\text{第 2 行}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-b & 0 \\ 0 & 1 & a-2+2b & 1 \\ 0 & 1 & ab & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第 2 行}\times(-1)\to\text{第 3 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-b & 0 \\ 0 & 1 & a-2+2b & 1 \\ 0 & 0 & (a-2)(b-1) & 1 \end{pmatrix}$$

となるので，a, b の値にかかわらず $\operatorname{rank} B = 3$ である．よって，$\boxed{\mathbf{28}}$ の答えは ③ である．

(2) 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解をもつ必要十分条件は，係数行列 A と拡大係数行列 $B = (A\ \boldsymbol{b})$ のランクが等しいとき，すなわち $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ が成り立つときである．特に係数行列 A が n 次の正方行列である場合は，連立方程式の解は次のようになる．

- $\operatorname{rank} A < \operatorname{rank} B$ のとき，連立 1 次方程式は解をもたない;
- $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B < n$ のとき，連立 1 次方程式は無数の解をもつ;
- $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = n$ のとき，連立 1 次方程式はただ 1 組の解をもつ．

本問の係数行列 A について，(1) の基本変形で得られた階段行列より，$\operatorname{rank} A \geq 2$ がわかる．具体的には，$a = 2$ または $b = 1$ のとき，$(a-2)(b-1) = 0$ となるので $\operatorname{rank} A = 2$ である．また，$a \neq 2$ かつ $b \neq 1$ のとき，$(a-2)(b-1) \neq 0$ となるので $\operatorname{rank} A = 3$ である．したがって $a = 2$ または $b = 1$ のとき，$\operatorname{rank} A = 2 < \operatorname{rank} B = 3$ であるので，連立 1 次方程式 $(*)$ は解をもたない．以上より，$\boxed{\mathbf{29}}$，$\boxed{\mathbf{30}}$ の答えは順に ②, ① であり，$\boxed{\mathbf{31}}$ の答えは ⓪ である．

(3) $a \neq 2$ かつ $b \neq 1$ のとき，$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 3$ であるので，連立 1 次方程式 $(*)$ はただ 1 組の解をもつ．よって，$\boxed{\mathbf{32}}$ の答えは ① となる．

問 5　行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & a & 2 \end{pmatrix}$ の対角化について考える．ただし，a は定数とする．

(1)　A の固有多項式は

$$\begin{vmatrix} 4-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 0 \\ -3 & a & 2-x \end{vmatrix} = -(x-2)^2(x - \boxed{\textbf{33}})$$

である．したがって，A の固有値は 2（重複度 2）と $\boxed{\textbf{33}}$ となる．

(2)　$a = \boxed{\textbf{34}}$ とする．このとき，固有値 2 に対する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{35}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

がとれ，また固有値 $\boxed{\textbf{33}}$ に対する固有ベクトルとして

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} \boxed{\textbf{36}} \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

がとれる．したがって，$P = (\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3)$ とおけば，行列 P は A を対角化する正則行列となる．実際に確かめると

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\textbf{33}} \end{pmatrix}$$

となる．

$\boxed{\textbf{33}}$ ～ $\boxed{\textbf{36}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5　⑥ 6　⑦ 7

⑧ -1　⑨ -2　ⓐ -3　ⓑ -4　ⓒ -5　ⓓ -6　ⓔ -7

解説

本問は行列の対角化可能性を問う問題である．一般に，全ての正方行列が対角化できるとは限らない．n 次正方行列が対角化可能であるための必要十分条件は，n 個の 1 次独立な固有ベクトルが存在することである．本問ではこの条件を用いて対角化について考察する．

(1) E を 3 次の単位行列とする．A の固有多項式の計算においてサラスの方法を適用すると

$$\begin{aligned}|A-xE| &= \begin{vmatrix} 4-x & 2 & 0 \\ 2 & 4-x & 0 \\ -3 & a & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (4-x)^2(2-x)-4(2-x) \\ &= -(x-2)(x^2-8x+12) \\ &= -(x-2)^2(x-6)\end{aligned}$$

となるので，固有値は 2（重複度 2）および 6 である．よって $\boxed{\mathbf{33}}$ の答えは ⑥ である．

(2) $\mathbf{0}$ を零ベクトルとするとき，固有値 x と対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対して

$$(A-xE)\,\boldsymbol{p}=\mathbf{0}$$

が成り立つ．これを利用して固有ベクトルを求めていく．

まず固有値が 2 の場合を考えると

$$(A-2E)\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

が成り立ち，これより連立方程式

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2 &= 0 \\ -3x_1+ax_2 &= 0 \end{cases}$$

が得られる．$a=-3$ のとき，連立方程式を解くと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s\neq 0 \text{ または } t\neq 0)$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{34}}$，$\boxed{\mathbf{35}}$ の答えは順に ⓐ, ⑧である．なお $a \neq -3$ のときは，連立方程式を解くと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$$

となり，対応する 1 次独立な固有ベクトルが 1 個しか存在せず，問題文と合致しない．

次に固有値が 6 の場合を考える．$\boxed{\mathbf{36}} = c$ とおくと，$(A-6E)\,\boldsymbol{p}_3 = \mathbf{0}$ より

$$(A-6E)\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c-4 \\ 2c+4 \\ -3c-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので，$c = -2$ である．よって，$\boxed{\mathbf{36}}$ の答えは ⑨となる．

第3分野　常微分方程式

〔 問 1 〜 問 5 ： 解答番号 $\boxed{\mathbf{37}}$ 〜 $\boxed{\mathbf{52}}$ 〕

(注意) 各問における y は x の関数であり，y', y'' は y の導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を表す．すべての微分方程式は関数が定義される範囲で考える．また，特殊解は特解ともいう．

問 1 微分方程式

$$(*) \qquad yy' + 2x(y^2+1) = 0$$

について考える．

(1) $(*)$ の一般解は任意の正の定数 C を用いて

$$y^2 + 1 = C\,\boxed{\mathbf{37}}$$

で与えられる．

$\boxed{37}$ の解答群

⓪ x^2	① $\log(x^2+1)$	② e^{x^2}	③ e^{-x^2}
④ $\dfrac{1}{x^2+1}$	⑤ $\dfrac{1}{2x^2+1}$	⑥ e^{2x^2}	⑦ e^{-2x^2}

(2) $(*)$ の解 $y = y(x)$ が初期条件 $y(0) = 1$ を満たすとき

$$y = \boxed{\mathbf{38}}$$

である．

$\boxed{38}$ の解答群

⓪ $2x^2 - 1$	① $\sqrt{2x^2-1}$	② $2e^{-x^2}$
③ $\log(x^2+1)+1$	④ $2e^{-x^2}-1$	⑤ $2e^{-2x^2}-1$
⑥ $\sqrt{\log(x^2+1)+1}$	⑦ $\sqrt{2e^{-x^2}-1}$	⑧ $\sqrt{2e^{-2x^2}-1}$

解説

(1) 1 階の微分方程式が

$$g(y)y' = f(x)$$

の形に帰着できるとき，変数分離形であるという．

$(*)$ の場合 $g(y) = \dfrac{y}{y^2+1}$, $f(x) = -2x$ として

$$\frac{y}{y^2+1}y' = -2x$$

と変数分離できる．両辺を積分すれば

$$\frac{1}{2}\log(y^2+1) = -x^2 + C_1 \qquad (C_1 \text{ は任意定数})$$

を得る．両辺を e の肩に乗せると $(y^2+1)^{\frac{1}{2}} = e^{C_1}e^{-x^2}$ となる．両辺を 2 乗し，$C = e^{2C_1}$ とすると，一般解として

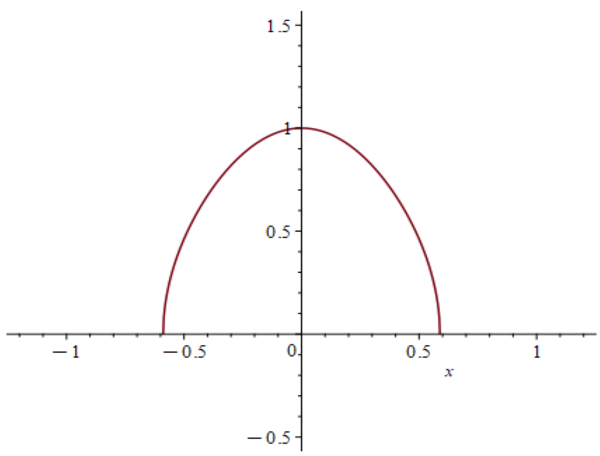
$$y^2 + 1 = Ce^{-2x^2} \qquad (C \text{ は正の定数})$$

を得る．したがって，$\boxed{\textbf{37}}$ の答えは ⑦ である．

(2) (1) で得られた一般解に $x = 0$ を代入すると，$y(0)^2 + 1 = 1 + 1 = C$ となるので，$C = 2$ である．よって

$$y^2 = 2e^{-x^2} - 1$$

となる．ここで，$y(0) = 1 > 0$ に注意して両辺の平方根を取ると，$y = \sqrt{2e^{-2x^2} - 1}$ となる．したがって，$\boxed{\textbf{38}}$ の答えは ⑧ である．この解のグラフを描くと，次のようになる:



関数が実数に値をとるためには，平方根の中身は 0 以上でなければならない．よって，この解の定義域は上の図のように，最大でも $-\sqrt{\frac{\log 2}{2}} \leqq x \leqq \sqrt{\frac{\log 2}{2}}$ となる．

問 2　微分方程式

$$(*)\qquad y' - \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

について考える．

(1)　$(*)$ に対応する同次方程式

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = 0$$

の一般解は，C を任意定数とすると

$$(**)\qquad y = C\ \boxed{\mathbf{39}}$$

と表される．

$\boxed{39}$ の解答群

⓪ $1+x$	① $\sqrt{1+x}$	② $1+x^2$	③ $\sqrt{1+x^2}$
④ $e^{\frac{x}{1+x^2}}$	⑤ $e^{-\frac{x}{1+x^2}}$	⑥ e^{x^2}	⑦ e^{-x^2}
⑧ $\log(1+x)$	⑨ $\log(1+x^2)$	ⓐ $\tan^{-1}x$	ⓑ $\sin^{-1}x$

(2)　$(**)$ において，C を x の関数 $u(x)$ と置き換えて，$y = u(x)\cdot\ \boxed{\mathbf{39}}$ を $(*)$ に代入すると

$$u' = \boxed{\mathbf{40}}$$

が得られる．この方程式の一般解は，任意定数 $\tilde{C}$ を用いて $u(x) = \boxed{\mathbf{41}} + \tilde{C}$ となるので，$(*)$ の一般解は

$$y = \left(\boxed{\mathbf{41}} + \tilde{C}\right)\cdot \boxed{\mathbf{39}}$$

である．

$\boxed{40}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	① $\dfrac{u}{\sqrt{1+x^2}}$	② $\dfrac{1}{1+x^2}$	③ $\dfrac{u}{1+x^2}$
④ $\dfrac{1}{1+x}$	⑤ $\dfrac{x}{1+ux}$	⑥ $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$	⑦ $\dfrac{1}{\tan x}$

$\boxed{\mathbf{41}}$ **の解答群**

⓪ $\sqrt{1+x^2}$	① $\dfrac{2}{\log(1+x^2)}$	② $\dfrac{1}{1+x^2}$	③ e^{2x}
④ $\dfrac{2}{\sqrt{1+x^2}}$	⑤ $\log(1+x^2)$	⑥ $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$	⑦ e^{-x^2}
⑧ $\tan x$	⑨ $\tan^{-1} x$	ⓐ $\sin x$	ⓑ $\sin^{-1} x$

解説

(1) $(*)$ に対応する同次方程式 $y' - \dfrac{x}{1+x^2}y = 0$ は変数分離形である．また，定数関数 $y=0$ はあきらかに $(*)$ の解であるので，$y \neq 0$ のときを考える．

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1+x^2}$$

と変形して両辺を x で積分すると，C_1 を任意定数として

$$\log|y| = \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C_1$$

となる．よって，両辺を e の肩に乗せると

$$y = \pm e^{C_1}\sqrt{1+x^2}$$

を得る．ここで，$C = \pm e^{C_1}$ とおけば，C は 0 以外の任意の値をとる．また，定数関数 $y=0$ も解であるが，これは $C=0$ とおくと得られる．ゆえに，対応する同次方程式の一般解は

$$y = C\sqrt{1+x^2} \quad (C \text{ は任意定数})$$

と表せる．よって，$\boxed{\textbf{39}}$ の答えは ③ となる．

(2) (1) の結果を用いて定数変化法で一般解を求める．$(**)$ における定数 C を x の関数 $u(x)$ で置き換えて $y = u(x)\cdot\sqrt{1+x^2}$ と置くと

$$y' = u'(x)\sqrt{1+x^2} + \frac{xu(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

となる．これを $(*)$ に代入すると

$$u'\sqrt{1+x^2} + \frac{xu}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{1+x^2}u\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

すなわち

$$u' = \frac{1}{1+x^2}$$

が得られる．よって，$\boxed{\textbf{40}}$ の答えは ② である．両辺を積分してこれを解くと，$\tilde{C}$ を任意定数として

$$u(x) = \tan^{-1}x + \tilde{C}$$

を得る．よって，$\boxed{\textbf{41}}$ の答えは ⑨ である．以上より，$(*)$ の一般解は

$$y = \left(\tan^{-1}x + \tilde{C}\right)\sqrt{1+x^2}$$

である．

問 3 xy 平面上の曲線 $C: y = y(x)$ $(2 < x < 4)$ は，点 $\mathrm{A}(3,3)$ を通り，C 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y)$ における C の接線は点 $\mathrm{P}(x,y)$ と点 $\mathrm{B}(3,2)$ を通る直線に垂直であるとする．このとき，関数 $y(x)$ が満たす微分方程式を求めたい．

C 上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ における接線の傾きは $y'(x)$ であり，仮定より，この接線は点 $\mathrm{P}(x,y)$ と点 $\mathrm{B}(3,2)$ を通る直線に垂直なので，関数 $y(x)$ は微分方程式

$(*)$ $\qquad y' = \boxed{\mathbf{42}}$

を満たす．

よって，微分方程式 $(*)$ を解き，C が点 $\mathrm{A}(3,3)$ を通ることを用いると，C 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,y)$ は $\boxed{\mathbf{43}}$ を満たす．C は xy 平面上の $\boxed{\mathbf{44}}$ の一部を表す．

$\boxed{42}$ の解答群

⓪ $\dfrac{y}{x}$	① $-\dfrac{y}{x}$	② $\dfrac{x}{y}$	③ $-\dfrac{x}{y}$
④ $\dfrac{y-2}{x-3}$	⑤ $-\dfrac{y-2}{x-3}$	⑥ $\dfrac{y-3}{x-2}$	⑦ $-\dfrac{y-3}{x-2}$
⑧ $\dfrac{x-3}{y-2}$	⑨ $-\dfrac{x-3}{y-2}$	ⓐ $\dfrac{x-2}{y-3}$	ⓑ $-\dfrac{x-2}{y-3}$

$\boxed{43}$ の解答群

⓪ $y = 2x - 3$	① $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$	② $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$
③ $y = \dfrac{1}{8}x^2$	④ $y^2 = 2x$	⑤ $(x-3)^2 - (y-2)^2 = 1$
⑥ $x^2 + y^2 = 20$	⑦ $x^2 - y^2 = 12$	⑧ $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 3$
⑨ $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	ⓐ $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$	ⓑ $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$

$\boxed{44}$ の解答群

⓪ 直線	① 円	② 双曲線	③ 放物線
④ レムニスケート	⑤ 懸垂線		

解説

曲線 C: $y = y(x)$ の点 $\mathrm{P}(x, y)$ における接線の傾きは $y'(x)$ で与えられる．仮定より，曲線 C の接線は，点 $\mathrm{P}(x, y)$ と点 $\mathrm{B}(3, 2)$ を通る直線と垂直であるので

$$y' \cdot \frac{y-2}{x-3} = -1$$

が成り立つ．よって，関数 $y(x)$ が満たす微分方程式は

$$(*) \qquad y' = -\frac{x-3}{y-2}$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{42}}$ の答えは ⑨ である．

微分方程式 $(*)$ は $(y-2)y' = -(x-3)$ と変数分離できる．両辺を積分すると，$\frac{1}{2}(y-2)^2 = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + C_1$ (C_1 は任意定数) となるので

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = C_2 \quad (C_2 \text{ は任意定数})$$

が得られる．また，曲線 C は点 $\mathrm{A}(3, 3)$ を通るので，$0 + 1 = C_2$，すなわち $C_2 = 1$ である．よって，曲線 C の点 $\mathrm{P}(x, y)$ は

$$(**) \qquad (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$$

を満たす．$(**)$ は，xy 平面上の，中心 $(3, 2)$，半径 1 の円を表している．よって，$\boxed{\mathbf{43}}$ の答えは ② であり，$\boxed{\mathbf{44}}$ の答えは ① である．

特に，曲線 C は $y = 2 + \sqrt{1-(x-3)^2} \quad (2 < x < 4)$ と表される．

問 4　微分方程式

$$(*) \qquad y'' + \frac{9}{4}\,y = 0$$

について考える．

(1)　$(*)$ の一般解 $y(x)$ は任意定数 C_1, C_2 を用いて $y(x) = \boxed{\mathbf{45}}$ と表される．

$\boxed{45}$ の解答群

⓪ $C_1\,e^{-\frac{9}{4}x} + C_2\,e^{\frac{9}{4}x}$　　① $C_1\,e^{-\frac{3}{2}x} + C_2\,e^{\frac{3}{2}x}$

② $C_1 + C_2\,e^{-\frac{9}{4}x}$　　③ $C_1\,e^{\frac{3}{2}x} + C_2\,xe^{\frac{3}{2}x}$

④ $C_1 \cos\dfrac{9}{4}x + C_2 \sin\dfrac{9}{4}x$　　⑤ $C_1 \cos\dfrac{3}{2}x + C_2 \sin\dfrac{3}{2}x$

(2)　(1) で求めた $(*)$ の解 $y(x)$ が，条件

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) < 0, \quad \int_0^{\pi} y(x)^2\,dx = 1$$

を満たすとき

$$C_1 = \boxed{\mathbf{46}}, \quad C_2 = \boxed{\mathbf{47}}$$

である．

$\boxed{46}$ ・ $\boxed{47}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② π　③ π^2　④ $\dfrac{\pi}{2}$　⑤ $\dfrac{\pi^2}{4}$

⑥ $\dfrac{1}{\pi}$　⑦ $\dfrac{2}{\pi}$　⑧ $\sqrt{\pi}$　⑨ $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$　ⓐ $\sqrt{\dfrac{1}{\pi}}$　ⓑ $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$

解説

微分方程式 $(*)$ は定数係数の 2 階線形微分方程式である．

(1)　$(*)$ に対応する特性方程式

$$\lambda^2 + \frac{9}{4} = 0$$

の解は $\lambda = \pm\frac{3}{2}i$（異なる 2 つの虚数解）であるから，同次方程式の一般解 $y(x)$ は

$$y(x) = C_1 \cos\frac{3}{2}x + C_2 \sin\frac{3}{2}x$$

となる．よって，$\boxed{\mathbf{45}}$ の答えは ⑤ である．

(2)　$y(0) = 0$ より，$C_1 = 0$．よって，$\boxed{\mathbf{46}}$ の答えは ⓪ である．
また，$\int_0^\pi y(x)^2\,dx = 1$ より

$$\int_0^\pi (C_2)^2 \sin^2\frac{3}{2}x dx = \int_0^\pi (C_2)^2\,\frac{1-\cos 3x}{2}dx = \frac{\pi}{2}\,(C_2)^2 = 1.$$

一方，$y(\pi) < 0$ より，$C_2 > 0$ だから，$C_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$．よって，$\boxed{\mathbf{47}}$ の答えは ⓑ である．

問 5　微分方程式

$$(*)\qquad y'' + 2y' + 5y = \cos\omega x$$

について考える．ただし，ω は正の実数である．

(1)　$y_p(x) = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$ が $(*)$ の特殊解になるように，定数 C_1, C_2 を定める．$y_p(x)$ を $(*)$ へ代入し，$\cos\omega x$ と $\sin\omega x$ の係数をそれぞれ比較すると，係数行列を用いて C_1 と C_2 に関する連立方程式

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{48}} & \boxed{\mathbf{49}} \\ -\boxed{\mathbf{49}} & \boxed{\mathbf{48}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る．係数行列の逆行列が存在するので

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{48}} & \boxed{\mathbf{49}} \\ -\boxed{\mathbf{49}} & \boxed{\mathbf{48}} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり，$C_1 = \dfrac{\boxed{\mathbf{48}}}{\boxed{\mathbf{50}}}$，$C_2 = \dfrac{\boxed{\mathbf{49}}}{\boxed{\mathbf{50}}}$ を得る．

$\boxed{48}$ ・ $\boxed{49}$ の解答群

⓪ 2ω　① -2ω　② $4\omega^2$　③ $\dfrac{2}{\omega}$　④ $-\dfrac{2}{\omega}$

⑤ $\omega^2 - 5$　⑥ $5 - \omega^2$　⑦ $(5-\omega^2)^2$　⑧ $\dfrac{1}{\omega^2 - 5}$　⑨ $\dfrac{1}{5 - \omega^2}$

$\boxed{50}$ の解答群

⓪ 2ω　① -2ω　② $\omega^2 - 5$　③ $5 - \omega^2$

④ $-\omega^2 + 2\omega + 5$　⑤ $-\omega^2 - 2\omega + 5$　⑥ $4\omega^2$　⑦ $(5-\omega^2)^2$

⑧ $(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2$　⑨ $(-\omega^2 + 2\omega + 5)^2$　ⓐ $5 + \omega^2$　ⓑ $(5+\omega^2)^2$

(2)　三角関数の合成より，(1) で求めた y_p は

$$I = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\mathbf{50}}}},\quad \sin\phi = \frac{\boxed{\mathbf{48}}}{\sqrt{\boxed{\mathbf{50}}}},\quad \cos\phi = \frac{\boxed{\mathbf{49}}}{\sqrt{\boxed{\mathbf{50}}}}$$

を用いて $y_p(x) = I\sin(\omega x + \phi)$ と表せる．

ω を正の実数全体を動かすことで，I を ω の関数 $I(\omega)$ と考える．このとき，$I(\omega)$ は $\omega =$ **51** で最大値 **52** をとる．

51 ・ **52** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 5	⑥ $\sqrt{2}$	⑦ $\sqrt{3}$
⑧ $\sqrt{5}$	⑨ $\frac{1}{2}$	ⓐ $\frac{1}{3}$	ⓑ $\frac{1}{4}$	ⓒ $\frac{1}{5}$	ⓓ $\frac{1}{\sqrt{2}}$	ⓔ $\frac{1}{\sqrt{3}}$	ⓕ $\frac{1}{\sqrt{5}}$

解説

(1)　(*) に $y_p(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ を代入すると

$$\left(-\omega^2 C_1 + 2\omega C_2 + 5C_1\right) \cos \omega x + \left(-\omega^2 C_2 - 2\omega C_1 + 5C_2\right) \sin \omega x = \cos \omega x$$

を得る．両辺の $\cos \omega x$ と $\sin \omega x$ の係数を比較して

$$\begin{cases} -\omega^2 C_1 + 2\omega C_2 + 5C_1 &= 1 \\ -\omega^2 C_2 - 2\omega C_1 + 5C_2 &= 0 \end{cases}$$

を得る．これを行列を用いた C_1, C_2 に関する連立方程式で表すと

$$\begin{pmatrix} 5-\omega^2 & 2\omega \\ -2\omega & 5-\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる．よって， **48** と **49** の答えは，それぞれ ⑥ と ⓪ である．さらに

$$\begin{pmatrix} 5-\omega^2 & 2\omega \\ -2\omega & 5-\omega^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2} \begin{pmatrix} 5-\omega^2 & -2\omega \\ 2\omega & 5-\omega^2 \end{pmatrix}$$

であるから，$C_1 = \dfrac{5-\omega^2}{(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2}$，$C_2 = \dfrac{2\omega}{(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2}$ となる．よって，**50** の答えは ⑧ である．

(2)　三角関数の合成より

$$y_p(x) = \frac{1}{\sqrt{(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2}} \sin(\omega x + \phi)$$

と表せる．ただし

$$I = \frac{1}{\sqrt{(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2}},\ \sin\phi = \frac{5-\omega^2}{\sqrt{(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2}},\ \cos\phi = \frac{2\omega}{\sqrt{(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

である．

このとき，$(5-\omega^2)^2 + 4\omega^2 = \left(\omega^2 - 3\right)^2 + 16$ だから，$I(\omega)$ は $\omega = \sqrt{3}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる．よって，**51** と **52** の答えは，それぞれ ⑦ と ⓑ である．

第4分野　確率・統計

〔問1〜問4：解答番号 $\boxed{53}$ 〜 $\boxed{71}$ 〕

(注意)　事象 A に対し，$P(A)$ は A の起こる確率を表す．また，確率変数 X に対し，$E(X)$, $V(X)$ はそれぞれ期待値 (平均，平均値)，分散を表す.

問1　(1)　確率変数 X, Y の確率分布がそれぞれ

X の値	-3	0	2
確率	a	0.3	b

Y の値	-1	4
確率	0.6	0.4

(a, b は定数)

で与えられていて，$E(X) = 0.4$ が成り立つとする．このとき，$a = \boxed{53}$ である．また $V(-Y) = \boxed{54}$ である．さらに，X, Y が独立であれば

$$P(XY = -2) = \boxed{55},\quad E(XY) = \boxed{56}$$

である.

$\boxed{53}$ ・ $\boxed{55}$ ・ $\boxed{56}$ の解答群

⓪ 0　① 0.1　② 0.2　③ 0.3　④ 0.4　⑤ 0.5

⑥ 0.6　⑦ 0.7　⑧ 0.8　⑨ 0.9　ⓐ 1

$\boxed{54}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② 2　③ 6　④ 7　⑤ 8

⑥ -1　⑦ -2　⑧ -6　⑨ -7　ⓐ -8

(2)　確率変数 Z の確率密度関数 $f(x)$ が，定数 c によって

$$f(x)=\begin{cases} c\,e^{-2(x-1)}, & x \geqq 1, \\ 0, & x<1 \end{cases}$$

で与えられている．このとき，$c=$ **57** であり，$E(Z)=$ **58** が成り立つ．
また

$$P(-2<Z\leqq \boxed{\mathbf{59}})=1-e^{-6}$$

である．

57 〜 **59** の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 3	④ 4	⑤ 6
	⑥ $\frac{1}{2}$	⑦ $\frac{3}{2}$	⑧ $\frac{1}{3}$	⑨ $\frac{2}{3}$	ⓐ $\frac{1}{6}$
	ⓑ e^{-2}	ⓒ e^{-3}	ⓓ e^{-6}	ⓔ $\log 2$	ⓕ $\log 3$

解説

(1)　全事象の確率は 1 であるから

$$a + 0.3 + b = 1$$

が成り立つ．一方，X の期待値は仮定より

$$E(X) = -3a + 0 \cdot 0.3 + 2b = 0.4$$

である．これら 2 つの式を a, b について解けば

$$a = 0.2, \qquad b = 0.5$$

となる．また，確率変数 Y について

$$E(Y) = -1 \cdot 0.6 + 4 \cdot 0.4 = 1,$$

$$E(Y^2) = (-1)^2 \cdot 0.6 + 4^2 \cdot 0.4 = 7$$

であるから

$$V(-Y) = V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = 7 - 1^2 = 6$$

となる．さらに，X, Y が独立であれば

$$\begin{aligned} P(XY = -2) &= P(X = 2, Y = -1) \\ &= P(X = 2)P(Y = -1) = b \cdot 0.6 = 0.3, \end{aligned}$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) = 0.4 \cdot 1 = 0.4$$

となる．したがって，$\boxed{\mathbf{53}}$ ～ $\boxed{\mathbf{56}}$ の答えは順に ②, ③, ③, ④ である．

(2)　確率密度関数 $f(x)$ を実数全体で積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{1}^{\infty} ce^{-2(x-1)}dx = \left[-\frac{c}{2}e^{-2(x-1)}\right]_1^{\infty} = \frac{c}{2} = 1$$

であるから，$c = 2$ である．すると Z の期待値は

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{1}^{\infty} 2xe^{-2(x-1)}dx \\ &= \left[-xe^{-2(x-1)}\right]_1^{\infty} + \int_{1}^{\infty} e^{-2(x-1)}dx \\ &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

また，$y < 1$ のとき

$$P(-2 < Z \leqq y) = \int_{-2}^{y} f(x)dx = 0$$

である．$y \geqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} P(-2 < Z \leqq y) &= \int_{-2}^{y} f(x)dx = \int_{1}^{y} 2e^{-2(x-1)}dx \\ &= \left[-e^{-2(x-1)}\right]_{1}^{y} = 1 - e^{-2(y-1)} \end{aligned}$$

であり，右辺の値が $1-e^{-6}$ になるのは $y = 4$ のときである．したがって，$\boxed{\mathbf{57}}$ ～ $\boxed{\mathbf{59}}$ の答えは順に ②, ⑦, ④ である．

注意．確率変数 $W = Z - 1$ が指数分布に従うことを用いて計算しても同じ結果が得られる．

問 2　2 つの事象 A, B に対し

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

とする．

(1)　$P(A \cap B) =$ $\boxed{\textbf{60}}$ であり，A と B は $\boxed{\textbf{61}}$ ．

(2)　事象 C が $P(C) = \dfrac{1}{8}$ かつ $C \subset A \cap B$ を満たすとき，$A \cap B$ が起こったときの C が起こる条件付き確率は $P(C \mid A \cap B) =$ $\boxed{\textbf{62}}$ である．

$\boxed{\textbf{60}}$ ・ $\boxed{\textbf{62}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② $\frac{1}{2}$	③ $\frac{1}{3}$	④ $\frac{2}{3}$
	⑤ $\frac{1}{4}$	⑥ $\frac{3}{4}$	⑦ $\frac{1}{5}$	⑧ $\frac{1}{6}$
	⑨ $\frac{1}{8}$	ⓐ $\frac{3}{8}$	ⓑ $\frac{1}{12}$	ⓒ $\frac{5}{12}$

$\boxed{\textbf{61}}$ の解答群

⓪ 独立である　　① 従属である（独立ではない）

② 独立とも従属ともいえない

解説

(1) 仮定より

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

である．また

$$P(A)P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}\neq P(A\cap B)$$

なので，A と B は従属である（独立ではない）．したがって， $\boxed{\textbf{60}}$, $\boxed{\textbf{61}}$ の答えは順に ⑧, ① である．

(2) 条件付き確率の定義より

$$P(C\,|\,A\cap B)=\frac{P(C\cap(A\cap B))}{P(A\cap B)}=\frac{P(C)}{P(A\cap B)}=\frac{1/8}{1/6}=\frac{3}{4}$$

である．したがって， $\boxed{\textbf{62}}$ の答えは ⑥ である．

問 3　サイコロを 1 回投げたとき，1 の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるとする．このサイコロを初めて 1 の目が出るまで繰り返し投げたとき，その回数を表す確率変数を X とする．

(1)　X の確率分布は $P(X=k)=$ $\boxed{\mathbf{63}}$ $(k=1,2,\ldots)$ である．

(2)　サイコロを k 回投げて，一度も 1 の目が出ない確率は $P(X>k)=$ $\boxed{\mathbf{64}}$ であり，偶数回目に初めて 1 の目が出る確率は $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} P(X=2k)=$ $\boxed{\mathbf{65}}$ である．

(3)　初めて 1 の目が出るまで投げた回数の期待値は

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\qquad(|x|<1)$$

であることを用いると，$E(X)=$ $\boxed{\mathbf{66}}$ である．

$\boxed{\mathbf{63}}$ ・ $\boxed{\mathbf{64}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{6^{k-1}}$	① $\dfrac{1}{6^{k}}$	② $\dfrac{1}{6^{k+1}}$
③ $\dfrac{5}{6^{k-1}}$	④ $\dfrac{5}{6^{k}}$	⑤ $\dfrac{5}{6^{k+1}}$
⑥ $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}$	⑦ $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k}$	⑧ $\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k+1}$
⑨ $\dfrac{5^{k-1}}{6^{k}}$	ⓐ $\dfrac{5^{k}}{6^{k+1}}$	ⓑ $\dfrac{6!}{k!(6-k)!}\cdot\dfrac{5^{6-k}}{6^{k}}$

$\boxed{\mathbf{65}}$ ・ $\boxed{\mathbf{66}}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② 2	③ 6	④ 30
⑤ 36	⑥ $\dfrac{1}{2}$	⑦ $\dfrac{6}{5}$	⑧ $\dfrac{1}{6}$	⑨ $\dfrac{5}{6}$
ⓐ $\dfrac{5}{11}$	ⓑ $\dfrac{6}{11}$	ⓒ $\dfrac{6}{25}$	ⓓ $\dfrac{36}{25}$	ⓔ $\dfrac{25}{36}$

解説

(1) 確率変数 X は自然数の値をとり，その実現値が k になるのは，サイコロを繰り返し投げて $k-1$ 回連続して 1 以外の目が出た後に 1 の目が出る場合であるから，その確率は

$$P(X=k)=\left(1-\frac{1}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5^{k-1}}{6^k}$$

となる．したがって，$\boxed{\textbf{63}}$ の答えは ⑨ である．

(2) サイコロを k 回投げて一度も 1 の目が出ないのは，X の実現値が k より大きいときであり，それは $k-1$ 回連続して 1 以外の目が出る場合なので

$$P(X>k)=\left(1-\frac{1}{6}\right)^{k}=\left(\frac{5}{6}\right)^{k}$$

となる．また，偶数回目に初めて 1 の目が出るとき，X の実現値は偶数になるので，その確率は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}P(X=2k)&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1}\cdot\frac{1}{6}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{k}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{6}\\&=\frac{1}{5}\cdot\frac{25/36}{1-25/36}=\frac{5}{11}\end{aligned}$$

となる．したがって，$\boxed{\textbf{64}}$，$\boxed{\textbf{65}}$ の答えは順に ⑦, ⓐ である．

(3) 初めて 1 の目が出るまで投げた回数の期待値は

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1-5/6)^2}=6$$

となる．したがって，$\boxed{\textbf{66}}$ の答えは ③ である．

問 4 S 町では，毎年ある品種の柿（かき）を生産し，全国に出荷をしている．今年収穫した柿 1 個あたりの重さの平均を μ g とする．いま，何個かの柿を無作為に選びそれぞれの重さを測定したとき，μ の値に関する信頼度 95% の信頼区間について考える．柿 1 個あたりの重さは正規分布に従い，その標準偏差は 15 g であるとする．

まず，標本の個数を n とし，それぞれの重さを表す確率変数を $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とすると，これらは互いに独立であり，いずれも正規分布 $N(\mu, 15^2)$ に従う．よって，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

は正規分布 $N\left(\boxed{\textbf{67}}, \boxed{\textbf{68}}\right)$ に従う．そこで

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\boxed{\textbf{69}}}$$

とおけば，Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である．正規分布表から

$$P(|Z| \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$$

であることがわかり

$$P\left(\overline{X} - \boxed{\textbf{70}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + \boxed{\textbf{70}}\right) \fallingdotseq 0.95$$

を得る．これは，選んだ柿の重さがそれぞれ $x_1, x_2, \ldots, x_n$（単位：g）であれば，$\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ であり，μ の信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[\overline{x} - \boxed{\textbf{70}},\ \overline{x} + \boxed{\textbf{70}}\right]$$

となることを意味する．この信頼区間の幅は $2 \times \boxed{\textbf{70}}$ である．信頼度を変えずに標本の個数 n を 10 倍にすると信頼区間の幅は $\boxed{\textbf{71}}$ 倍になる．

$\boxed{\textbf{67}}$ の解答群

⓪ 0　① 1　② μ　③ 2μ　④ $n\mu$

⑤ $\frac{\mu}{n}$　⑥ μ^2　⑦ $2\mu^2$　⑧ $n\mu^2$　⑨ $\frac{\mu^2}{n}$

$\boxed{\mathbf{68}}$ ・ $\boxed{\mathbf{69}}$ の解答群

⓪ 15	① 15^2	② $\sqrt{15}$	③ $15n$	④ 15^2n
⑤ $\sqrt{15}n$	⑥ $15n^2$	⑦ 15^2n^2	⑧ $15\sqrt{n}$	⑨ $\dfrac{15}{n}$
ⓐ $\dfrac{15^2}{n}$	ⓑ $\dfrac{15}{n^2}$	ⓒ $\dfrac{15^2}{n^2}$	ⓓ $\dfrac{15}{\sqrt{n}}$	ⓔ $\sqrt{\dfrac{15}{n}}$

$\boxed{\mathbf{70}}$ の解答群

⓪ 0.025	① 0.05	② 5.88	③ 29.4	④ 58.8
⑤ $5.88n$	⑥ $29.4n$	⑦ $58.8n$	⑧ $\dfrac{5.88}{n}$	⑨ $\dfrac{29.4}{n}$
ⓐ $\dfrac{58.8}{n}$	ⓑ $\dfrac{5.88}{\sqrt{n}}$	ⓒ $\dfrac{29.4}{\sqrt{n}}$	ⓓ $\dfrac{58.8}{\sqrt{n}}$	

$\boxed{\mathbf{71}}$ の解答群

⓪ 1	① 10	② 20	③ 100
④ $\dfrac{1}{5}$	⑤ $\dfrac{1}{10}$	⑥ $\dfrac{1}{50}$	⑦ $\dfrac{1}{100}$
⑧ $\sqrt{10}$	⑨ $2\sqrt{10}$	ⓐ $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$	ⓑ $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$

解説

仮定より，柿の重さを表す確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立で，いずれも平均が μ, 分散が 15^2 の正規分布 $N(\mu, 15^2)$ に従うから，標本平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

も正規分布に従い，その平均と分散について

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= \frac{1}{n}\left\{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\right\} \\ &= \frac{1}{n}(\mu + \mu + \cdots + \mu) \quad (\mu \text{ が } n \text{ 個}) \\ &= \frac{n\mu}{n} = \mu \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} V(\overline{X}) &= \frac{1}{n^2}\left\{V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\right\} \\ &= \frac{1}{n^2}\left(15^2 + 15^2 + \cdots + 15^2\right) \quad (15^2 \text{ が } n \text{ 個}) \\ &= \frac{15^2}{n} \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，$\overline{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \dfrac{15^2}{n}\right)$ に従う．したがって，**67** ，**68** の答えは順に② ，ⓐ である．さらに，$\overline{X}$ からその平均 $E(\overline{X}) = \mu$ を引き，標準偏差 $\sqrt{V(\overline{X})} = \dfrac{15}{\sqrt{n}}$ で割ってできる確率変数

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{15/\sqrt{n}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．したがって，**69** の答えは ⓓ である．さて，正規分布表より

$$\begin{aligned} P(|Z| \leqq 1.96) &= P\left(-1.96 \leqq \frac{\overline{X} - \mu}{15/\sqrt{n}} \leqq 1.96\right) \\ &= P\left(\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(\overline{X} - \frac{29.4}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \overline{X} + \frac{29.4}{\sqrt{n}}\right) \fallingdotseq 0.95 \end{aligned}$$

であることがわかる．したがって，**70** の答えは ⓒ である．これは，選んだ柿の重さがそれぞれ $x_1, x_2, \ldots, x_n$（単位：g）であれば，$\overline{X}$ の実現値は $\overline{x} = \dfrac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ であり，μ の信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[\overline{x} - \frac{29.4}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + \frac{29.4}{\sqrt{n}}\right]$$

となることを意味する．この信頼区間の幅は $2 \times \dfrac{29.4}{\sqrt{n}}$ である．信頼度を変えずに標本の個数 n を 10 倍にすると信頼区間の幅は $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ 倍になる．したがって，$\boxed{\textbf{71}}$ の答えは ⓐ である．